



<36614162720011



<36614162720011

0,7 Bayer. Staatsbibliothek

GREGORI FONTANAE

E.
S. III.
719.

40 ~~Physic. gen. 96.~~
Math. II. 26 m

Physica. Opera varia physicam illustrantia 83.

R

GREGORII FONTANAE

CLER. REG. SCHOL. PIAR.

IN REG. CAES. PAPIENSI UNIVERSITATE

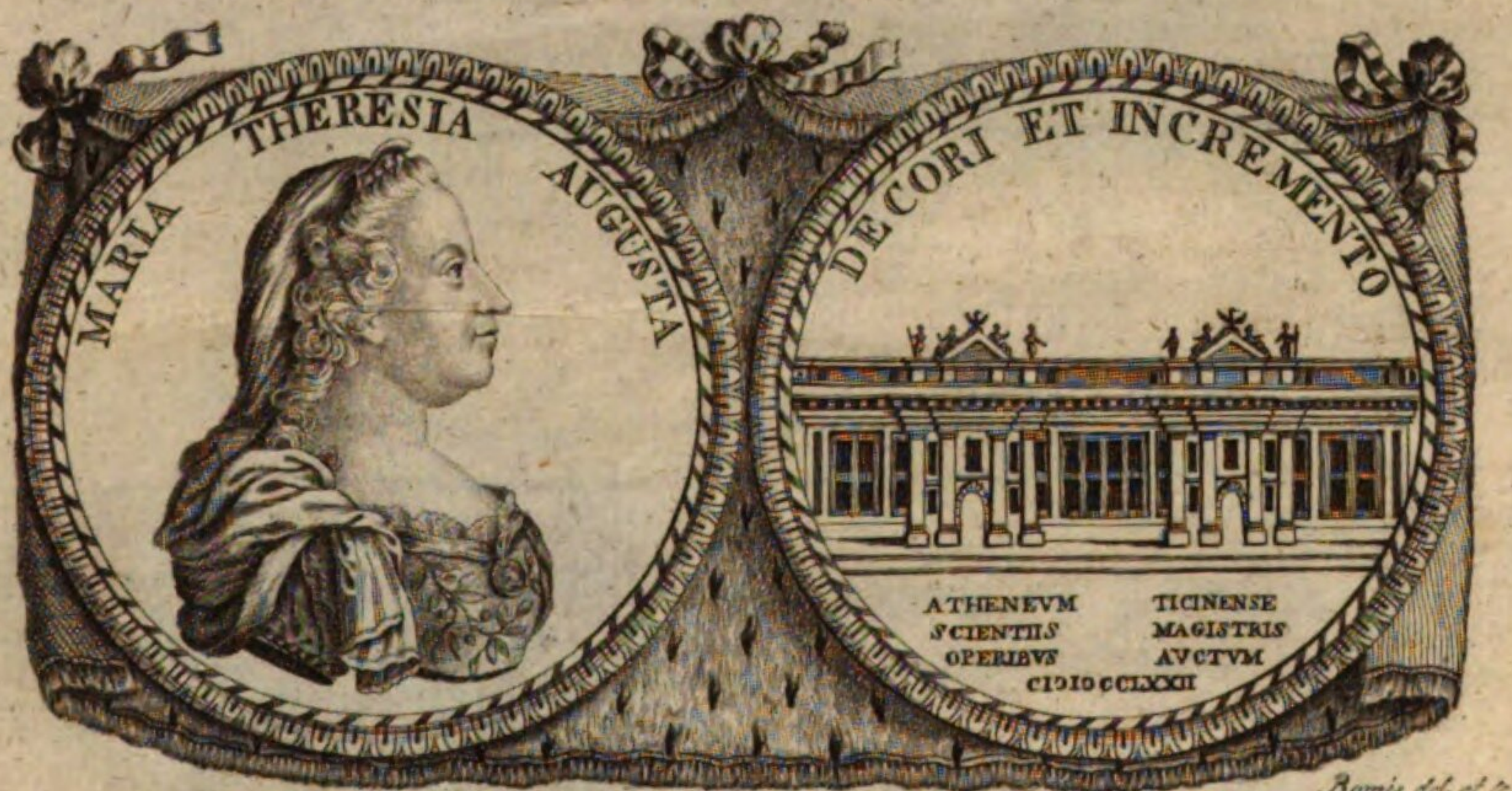
SUBLIMIORIS MATHESEOS PUBLICI PROFESSORIS

DISQUISITIONES

PHYSICO-MATHEMATICAE,

NUNC PRIMUM EDITAE.

Meo sum pauper in aere. *Hor. Lib. II. Ep. II.*



PAPIAE.

IN TYPOGRAPHEO MONAST. S. SALVATORIS.

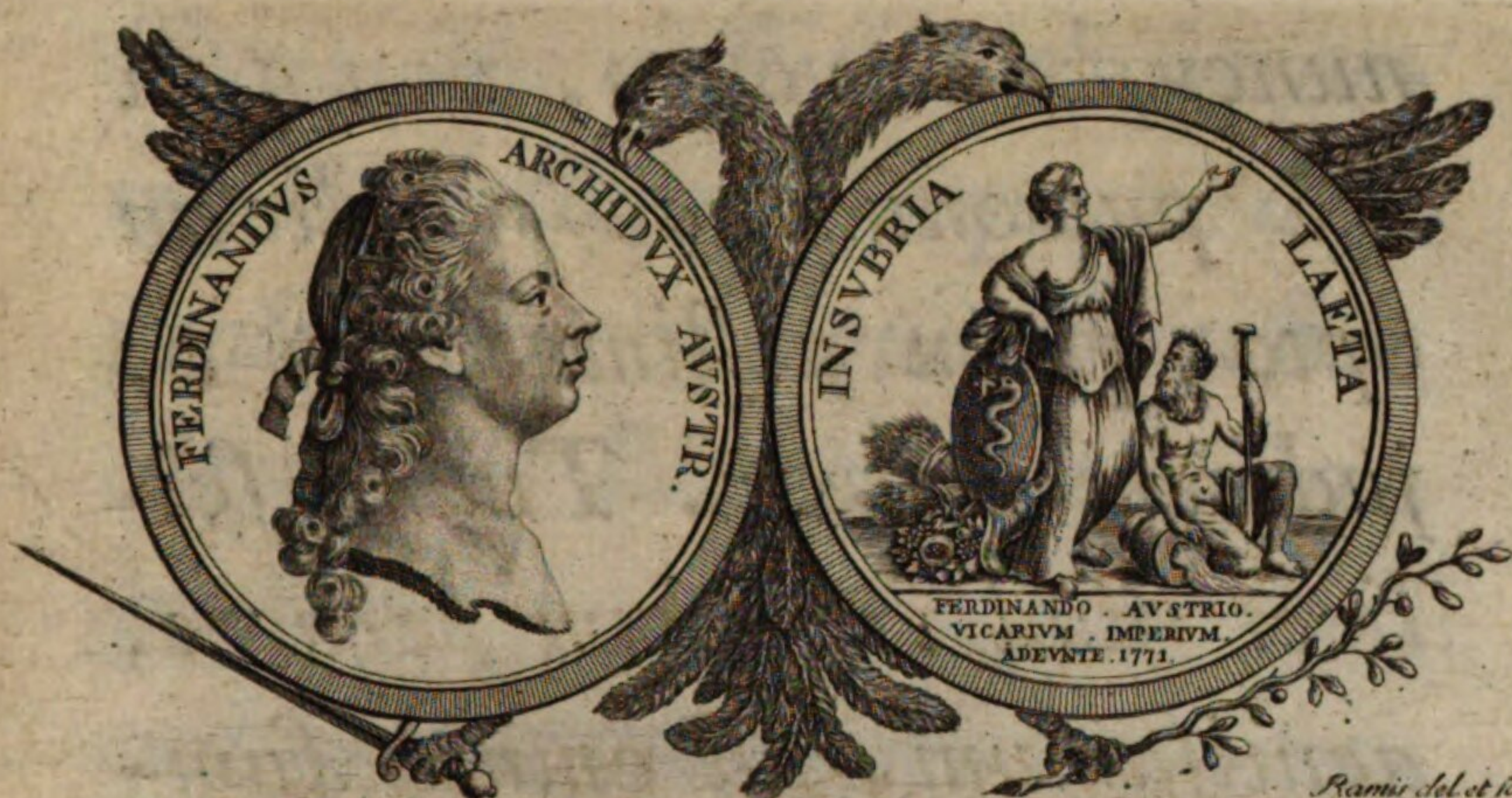
PRAESID. REI LITTER. PERMITT.

ANNO MDCCLXXX.



PHYSICO-MATHEMATICAE

**Bayerische
Staatsbibliothek
München**



FERDINANDO

HUNGARIAE ET BOHEMIAE PRINCIPI
AUSTRIAE ARCHIDUCI
INSUBRIAE AUSTRIACAE GUBERNATORI
ETC. ETC. ETC.



GREGORIUS FONTANA
FELICITATEM.

Ucubrationum
Mearum, quas
Tibi, FERDINANDE AUSTRIACE,

nuncupo & voveo, non tam
Te patronum ac vindicem
opto, quam aestimatorem ac
judicem vereor. Tuum sci-
licet istud ingenium peracre,
acutissimum, ad omnia sum-
ma natura factum, incredi-
bili celeritate praeter alia
quamplurima *Physicas* e-
tiam arripuit *Mathematicas*-
que *Disciplinas*, & pro in-
dolis magnitudine vulgaria
quaeque & in medio posita
despicientis in secretiora il-
larum adyta penetravit. Hinc

*Tuus ille exstitit ab incor-
rupto iudicio nunquam dis-
junctus amor, quo honestas
Artes ac Litteras ita com-
plecteris, ut quantum iis,
qui vere modesteque sapiunt,
ultro lubensque tribuis, tan-
tum abhorreas a fucata i-
sta, grandiloqua & circula-
toria philosophia, quae ae-
tatem nostram bonorum ae-
que ac malorum feracissi-
mam occupavit: ea enim est
fere humanarum rerum con-
ditio, ut quo tempore Scien-*

tiarum studia ardentissime
excoluntur, & a summo per-
fectionis fastigio videntur
jam propius abesse, tunc
praecipue inter paucos vere
solideque sapientes multae
undique quasi turmatim e-
mergant cohortes ardelionum,
qui magnis verbis ac miri-
ficis promissis populo se ven-
ditantes viis omnibus ad fa-
mam grassantur. Tu autem,
PRINCEPS SAPIENTISSIME, cum ab
his Tibi imponi non sinis,
tum illos Tua quotidie con-

*firmas benevolentia, aucto-
ritate tueris, ornas benefi-
ciis, nihil ut sibi de Te
polliceri non debeant Phi-
losophi sancto hoc nomine
digni, omnesque vel Tuo
unius exemplo intelligere
possint, quantum a Viris ip-
sis Principibus & populo-
rum rectoribus sinceræ Vir-
tuti ingenuisque Artibus sit
tribuendum, quæ sane si
magnis careant patrociniis,
vel humiles concidant, vel
debelitatae languescant, ne-*

cesse est. Atque hunc Tuum
effusum in Litteras favorem
sensit prae ceteris hoc no-
strum Papiense Archigymna-
sium, quod Tuis auspiciis
paucorum annorum interval-
lo ad eam crevit amplitudi-
nem gloriae, ut jam auda-
cter possit cum Italicorum,
atque adeo Europaeorum
florentissimo quoque de prin-
cipatu contendere. Quum
enim his proximis annis
lauta in primis supellectile,
pulcherrimisque rebus auctum

fuerit, iisque non ad speciem & fucum, sed ad veritatem utilitatemque compositis, Horto nempe Botanico; Theatris tribus Chémico, Anatomico, Chirurgico, Museis duobus altero Historiae Naturalis, Experimentalis Physicae altero, gemina Schola, Clinica nimirum, & Obstetricia demum Bibliotheca; ne quid postremo tantorum operum absolutioni ac perennitati deesset, hoc ipso anno inso-

litum illi decus & praesi-
dium comparasti nova re-
pente excitata eaque illustri
& splendida Typographia .
Quae omnia tam brevi in-
choata & perfecta dum no-
strates & exteri novarum re-
rum fama huc confluentes
attente circumspiciunt, taci-
to quodam sensu admonen-
tur, non potuisse aliunde res
tantas, tamque profusos &
plusquam Regios sumptus
quam ab AUSTRIACA Liberali-
tate & magnificentia profi-

cisci. Harum Tu haeres virtutum, & Majorum Tuorum gloriae ac praesertim MATERNAE custos & aemulator, isto flore aetatis, ista vividae indolis laetitia, acerrimo isto rerum omnium sensu admirabilique solertia illud jam es assequutus, ut in magnis quibusque inceptis omnes a Te omen capere possint. Quae cum ita sint, haud gravate feres, FERDINANDE CLEMENTISSIME, privatum hominem nihilque sibi tribuen-

*tem tanti P^RINCIPIS patrocini-
nium ad leves hasce litteru-
las postulare. Sic autem ha-
beto, me mortalium beatissi-
mum futurum, si infirmos
hosce somniculosi ac timidio-
ris ingenii conatus, publicae
lucis discrimen magnope-
re formidantes auspiciorum
Tuorum felicitate fortunave-
ris. Vale Tibi, populisque.*

*Dabam Papiae ex Regia Universitatis Bibliotheca
Id. Sept. Ann. MDCCLXXX.*



MONITUM.

AD designandas potestates 2^{am} ,
 3^{am} &c. finuum & cosinuum arcus
 cujuslibet ϕ usurpavi promiscue tum
 $\sin.^2 \phi$, $\sin.^3 \phi$, $\cos.^2 \phi$, $\cos.^3 \phi$ fre-
 quentius, tum $\sin. \phi^2$, $\sin. \phi^3$, $\cos. \phi^2$,

*

$\cos. \varphi^3$ parcius . Praeterea ubicumque occurrit quantitas $\sin. 2\psi^2$, $\sin. 2\psi^3$, $\cos. 2\psi^2$, $\cos. 2\psi^3$, intelligi volo potestatem secundam & tertiam ejus sinus vel cosinus , qui ad arcum aut angulum 2ψ refertur .

Id monendum duxi , ne specierum inconstantia , quae mihi ad res quam ad signa attentiori obrepfit & imposuit , perturbationem pareret , & perspicuitati officiens legentes removeretur .

Quod ad typorum correctionem attinet , curam hanc molestissimam mihiq; fere intolerabilem pro sua in

me observantia voluit alacriter ac strenue suscipere discipulus mei amantissimus Ferdinandus Messia Neapolitanus, ex Olivetana Familia, singulari fide homo, ingeniique acumine & iudicii vi supra aetatem praecellens. Is in se recipit deposito prope pignore, erratum vel omnino nullum, vel certe nullius momenti irrepsisse; quod in hujusmodi libris optare quidem, sperare vix possumus.

Ceterum si inter legendum animadvertes, me a Geometrarum maximis alicubi dissentire, naevumque unum aut alterum in immortalibus il-

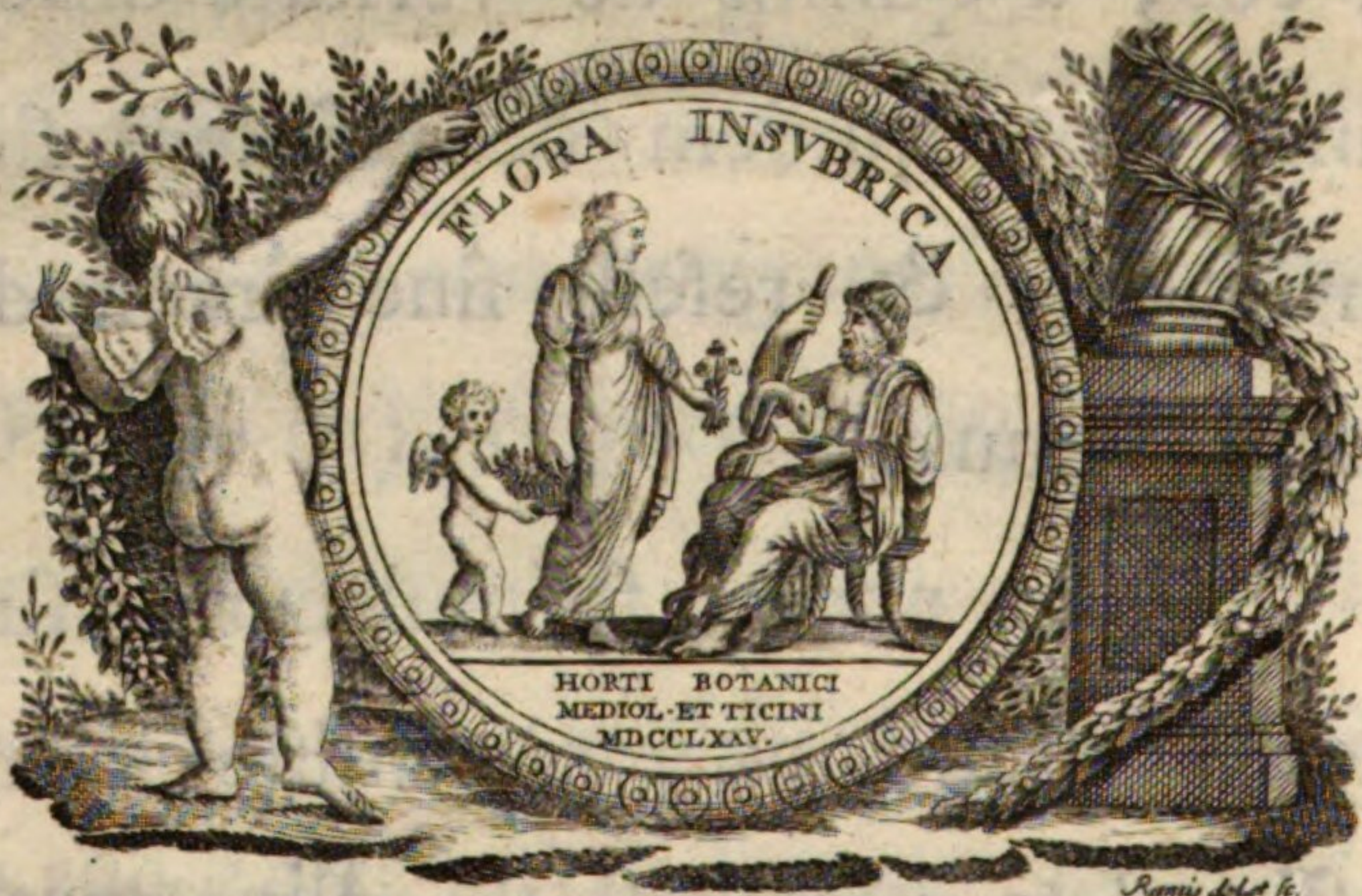
lorum Operibus notare, cave putes, voluisse me Viris doctissimis & famae securis, a quibus longissime absum, dicam impingere. Sancte enim affirmo, sine eorum laboribus & vigiliis, unde & haec nostra manarunt, pagellas hasce nunquam lucem fuisse aspecturas. Quod eo dico, ut omnes intelligant, grata beneficii recordatione nihil mihi esse antiquius: *est enim benignum*, ut dictum a PLINIO (a), & *plenum ingenui pudoris fateri per quos profeceris*. Si quid porro peccatum a nobis fuerit (pluries autem fuisse in re difficili, valde suf-

(a) In Praef. Hist. Nat.*

picamur), quo minus eadem lege;
 id est sine acerbitate & contumelia
 in nos agatur, non recusamus; quod
 si non modo sine convicio, sed huma-
 niter quoque & amice moneamur,
 gratias etiam habebimus. Sit ista, di-
 cam cum TULLIO, in Graecorum levi-
 tate perversitas, qui maledictis infectan-
 tur eos, a quibus de veritate dissen-
 tiunt: nos quidem & refellere sine
 pertinacia, & refelli sine iracundia
 parati sumus.

Unum addo, formularum usum
 selecto aliquo exemplo fuisse a me
 passim data opera illustratum: exper-

tus enim didici, in quaestionibus physico-mathematicis paullo abstrusioribus tironibus etiam acutioribus, nisi alias fuerint diuturna exercitatione subacti, aquam haerere, ubi ab universa rei forma ad peculiare & absolutum aliquid provocantur.



INDEX DISQUISITIONUM.

DISQUISITIO I.

*De Caloris Diurni Solaris
in variis Terrae Locis Aesti-
matione, & Comparatione. pag. 1*

DISQUISITIO II.

De Calore Annuo Solari. pag. 17

DISQUISITIO III.

*De Sanguinis Restitutione;
hujusque Problematis affinitate
& analogia cum Problemate an-
ticipationis, seu pecuniae in
anteceffum numeratae. pag. 49*

DISQUISITIO IV.

*De Insignibus quibusdam
Motus Verticalis Proprieta-
tibus in Corporibus ascenden-
tibus & libere descendentibus. pag. 73*

DISQUISITIO V.

*De Sideribus intervallum
inter datos duos Almickantarath
interceptum velocissime traji-
cientibus, seu a data qualibet
altitudine ad aliam quamlibet
datam tempore quamminimo
pertinentibus. pag. 97*

DISQUISITIO VI.

*De Astronomiae Nauticae
Theorematibus. pag. 125*

DISQUISITIO VII.

De Cometarum Motu. pag. 149

DISQUISITIO VIII.

De Axibus Æquilibrii. pag. 175

DISQUISITIO IX.

De Curvis a Centro Gravitatis descriptis. pag. 183

DISQUISITIO X.

*De Singularibus quibusdam
Centri Gravitatis Affectioni-
bus in spatio Hyperbolico-A-
symptotico.* pag. 191

DISQUISITIO XI.

De Maximis, & Minimis. pag. 199

DISQUISITIO XII.

De Æquationibus Indefinitis ; deque Methodo Indeterminatarum . pag. 277

DISQUISITIO XIII.

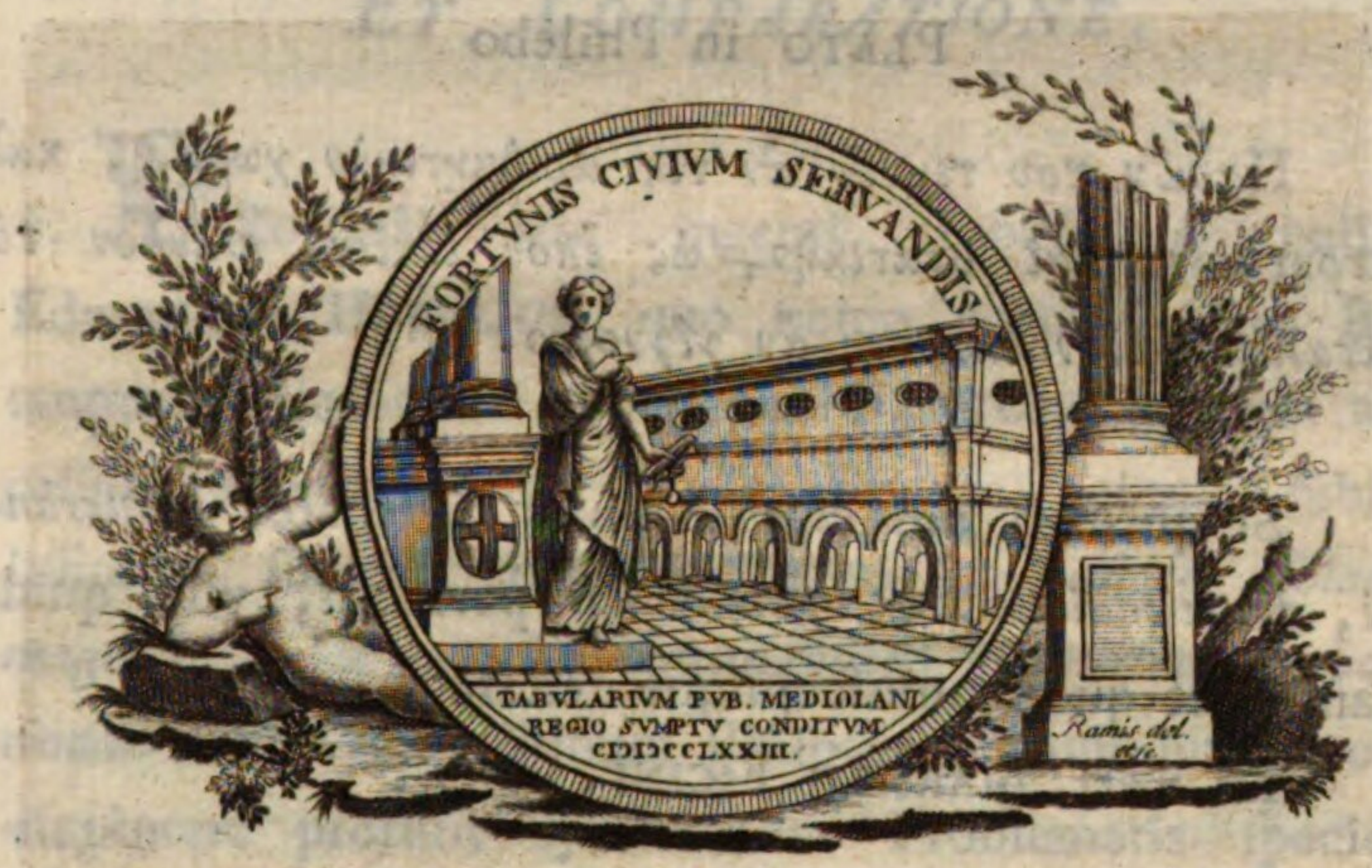
De Infinito Logarithmico . pag. 303

DISQUISITIO XIV.

De Percussione , aut Resistentia , quam Globus a Fluido impingente , vel impactu patitur , per experientiam definienda . pag. 323

DISQUISITIO XV.

*De Hora Caloris Maximi
intra Diem, deque Die Ca-
loris Maximi intra Annum . pag. 3 39*



in illius constructione (a) Phil. Tract. de Fluxione nobilis Theoriae Sermonibus in eximio Opere De Fluxione Doctrinae Problema tractavit analytice, formulamque exhibuit simplicissimam ex-

(a) Phil. Tract. num. 109. The perpendicular Heat of the Sun in the Latitude.

PLATO in Philebo

Πασῶν που τεχνῶν ἂν τις ἀριθμητικὴν χωρίζῃ, καὶ
μετρητικὴν, καὶ στατικὴν, ὥς ἔπος εἰπεῖν, φᾶνλον τὸ
καταλειπόμενον ἑκάστης ἂν γίγνοιτο.

Si quis ab omnibus Artibus segregaret *numeran-*
di, dimetiendique, & ponderandi peritiam, vile quid-
dam esset quod uniuscujusque restaret.

Ex vers. MARSILII FICINI.

Scientia, quam Globus a Plu-
do impingente, vel impelle-
peritur, per experientiam
definienda.

DISQUISITIO I.

DE CALORIS DIURNI SOLARIS

IN VARIIS TERRAE LOCIS

AESTIMATIONE

ET COMPARATIONE.

I. **P**rofundi vir ingenii subactique judicii Edmundus HALLEJUS, quo nemo propius inter Britannos Philosophos ad Magni NEWTONI gloriam accessisse videtur, anno 1693. omnium primus subtilissimam suscepit investigationem de caloris solaris magnitudine in omnibus latitudinibus terrestribus proportionali, & Transactionum Philosophicarum num. 203. elegantem protulit syntheticam Problematis speciosi ac difficilis constructionem (a). Post HALLEJI fata Geometra nobilis Thomas SIMPSONIUS in eximio Opere *De Fluxionum Doctrina* Problema retractavit analytice, formulamque exhibuit simplicissimam ex-

A

(a) Phil. Trans. num. 203. *The proportional Heat of the Sun in all Latitudes.*

primentem Solaris aestus vim in variis Terrae locis pro dato quolibet anni die, vel parte diei (b). Sed cum in eo esset SIMPSONIUS, ut fluxionionalis formulae momentaneum calorem exhibentis fluentem magnitudinem definiret, omissa constanti, quae non erat prorsus negligenda, humani aliquid passus est. Statui itaque, Problema iterum via analytica agredi, Tabulamque praeterea supputare, quae rationem exhibeat inter calorem diurnum utrumque sub Aequatore, & Polo pro declinationibus singulis solaribus ab 1° usque ad $23^{\circ} 28'$.

2. Jam primum omnium fatis constat, intendi calorem Solis crescente ipsius supra horizontem altitudine; & in ea sane ratione intendi, qua augeatur sinus altitudinis illius: neque enim audiendus est vir caetera doctus Fatio de DUILLIER, qui in Tractatu *De Murorum ad fovendas Arbores fructiferas inclinatione* (c), simplici rationi sinus elevationis Solaris rationem duplicatam substituit, contra quem egregie disputat, quaestionemque omnino dirimit vir acer & ingeniosus MAIRANUS in tertio *De generali Caloris Solaris Causa* Commentario (d). Con-

(b) SIMPSON *The Doctrine and Application of Fluxions* §. 470.

(c) *Fruit Walls improved by inclining them to the Horizon* p. 39.

(d) *Mém. de l' Accad. des Sciences de Paris* ann. 1765.

stat praeterea, majorem rursus fieri instantaneum Solis calorem, quo longior est momenti, vel tempusculi infinitesimi duratio, ut nimirum augeatur in ratione directa tempusculi. Hinc vero consequens est, momentaneum Solis aestum rationem sequi compositam ex sinu altitudinis & ex tempusculo conjunctim, riteque repraesentari per factum ex sinu altitudinis in tempusculum.

3. Superesset sane in hac supputatione elementum alterum expendendum, debilitatio scilicet radiorum solarium aerem perineantium, qui eo disperguntur magis atque intercipiuntur, quo minor est Solis elevatio. Sed praeter quam quod aliqua hic habetur compensatio, quum ex majori radiorum interceptorum copia terra quidem minus, aer autem magis incalescat, adeo perplexum incertumque deprehenditur hujusmodi elementum, ut nulli certae legi aut rationi subjici queat. Liquet id ex collatione Tabularum BOUGUERIANAE, & LAMBERTIANAE (e) quae varios exhibent debilitationis gradus radiorum solarium varia obliquitate atmosphaeram tranantium, quarum tabularum maxima est & vix credibilis discrepantia. A 2

(e) BOUGUER *Traité d'Optique sur la Gradation de la Lumière* Liv. III. Sect. IV.

LAMBERT *Photometria* §. 386.

4. Restat ergo, ut ardorem Solis instantaneum proportionalem statuamus facto quod oritur ex multiplicatione tempusculi per sinum altitudinis Solaris, hocque productum differentiale ad integrationem rite perducamus: ita enim formulam nanciscemur, quae Solis calorem repraesentabit intervallo quolibet diei perdurantem, indeque licebit comparisonem Caloris diurni Aequatorii & Polaris perspicue deducere.

Fig. 1.

5. Sit itaque in triangulo sphaerico SPZ S Sol, P Polus, Z Zenit, itaut latus PZ sit complementum latitudinis, latus PS complementum declinationis, latus ZS complementum elevationis Solis supra horizontem, vocataque loci latitudine λ , solis declinatione δ , & elevatione ε oriatur

$$\sin. PZ = \cos. lat. = \cos. \lambda$$

$$\sin. PS = \cos. decl. = \cos. \delta$$

$$\cos. PZ = \sin. lat. = \sin. \lambda$$

$$\cos. PS = \sin. decl. = \sin. \delta$$

$$\cos. ZS = \sin. elev. = \sin. \varepsilon$$

Jam vero notum est ex Sphaericorum Doctrina, in triangulo quolibet SPZ sequentem se prodere aequalitatem $\cos. ZS = \sin. PZ \sin. PS \cos. P + \cos. PZ \cos. PS$, hoc est, facto angulo horario P, vel $SPZ = z$,

$$\sin. \varepsilon = \cos. \lambda \cos. \delta \cos. z + \sin. \lambda \sin. \delta$$

6. Hoc posito quum calor Solis instantaneus sit uti factum ex sinu elevationis in tempusculum, ducto $\sin. \epsilon$ in elementum anguli horarii prodibit differentialis formula $- dz \sin. \epsilon$, hoc est $- dz \cos. z \cos. \lambda \cos. \delta - dz \sin. \lambda \sin. \delta$, in qua differentiale dz sumitur negative, quod crescente Solis altitudine decrescit horarius angulus. Hujus porro formulae integrale facile invenitur $= - \cos. \lambda \cos. \delta \sin. z - z \sin. \lambda \sin. \delta + \text{const.}$; talis igitur erit expressio caloris perseverantis ab ortu Solis usque ad elevationem ϵ . Quum autem in ipso ortus momento calor sit nullus, tuncque horarius angulus z abeat in arcum datum semidiurnum quem nominabimus h , fit ideo $\text{const.} = \cos. \lambda \cos. \delta \sin. h + h \sin. \lambda \sin. \delta$. Quapropter Solis calor ab ortu usque ad elevationem ϵ repraesentatur eleganti formula $(\sin. h - \sin. z) \cos. \lambda \cos. \delta + (h - z) \sin. \lambda \sin. \delta$.

7. Si in hac formula accipitur horarius angulus $z = 0$, quod fit ubi Sol loci meridianum attingit, ea convertitur in alteram simpliciorum $\sin. h \cos. \lambda \cos. \delta + h \sin. \lambda \sin. \delta$ exprimentem Solaris aestus quantitatem intervallo dimidia diei aggregatam & collectam. Et quoniam mutata Solis declinatione e boreali in australem $\sin. \delta$ negativus evadit, hinc est, ut Solis calor intervallo integrae diei perseverans

generalius, commodiusque exprimi queat per formulam $2 \sin. h \cos. \lambda \cos. \delta \pm 2 h \sin. \lambda \sin. \delta$.

8. Ex hisce porro consequitur, diurnum Solis calorem in loco quovis terrestri pro data qualibet Solis declinatione facillime comparari posse cum calore diurno loci alius cujuscumque pro data alia quavis declinatione, ita ut, si h , λ , δ designent angulum alium horarium, aliamque latitudinem, & declinationem, calor primus se habeat ad alterum quemadmodum $2 \sin. h \cos. \lambda \cos. \delta \pm 2 h \sin. \lambda \sin. \delta$ se habet ad $2 \sin. h' \cos. \lambda' \cos. \delta' \pm 2 h' \sin. \lambda' \sin. \delta'$. Igitur dictis C, C' diurnis caloribus haec semper stabit analogia $C : C' :: \sin. h \cos. \lambda \cos. \delta \pm h \sin. \lambda \sin. \delta : \sin. h' \cos. \lambda' \cos. \delta' \pm h' \sin. \lambda' \sin. \delta'$, in qua binorum signorum $\pm$ affirmativum usurpatur, si declinatio sit ejusdem nominis cum latitudine, borealis cum boreali, australis cum australi; & negativum accipitur, si contraria.

9. Quum autem pro variis Solis declinationibus variet ipsius a Tellure distantia, hujusque distantiae quadratis reciproce respondeat Solaris caloris proportio, quemadmodum Physicis perspectum est; iccirco assumptis D, D' pro distantiiis Solis a Terra, accuratorem nanciscimur analogiam

δ	$23^{\circ} 28'$
log. fin. $33'$	7, 9822334
log. cos. λ	9, 8480909
log. cos. δ	9, 9625076
log. cos. λ cos. δ	9, 8105985
log. $\frac{\text{fin. } 33'}{\text{cos. } \lambda \text{ cos. } \delta}$	8, 1716349
$-\frac{\text{fin. } 33'}{\text{cos. } \lambda \text{ cos. } \delta}$	-0, 014847
log. tang. λ	10, 0027793
log. tang. δ	9, 6376106
log. tang. λ tang. δ	9, 6403899
$-\text{tang. } \lambda \text{ tang. } \delta$	-0, 43691
Quamobrem fit cos. $h = -0, 014847 - 0, 43691$	
$= -0, 451757$, ac denique $h = 116^{\circ} 51'$.	
Petropoli vero quum fit $\lambda = 59^{\circ} 56'$, invenitur	
log. fin. $33'$	7, 9822334
log. cos. λ	9, 6998441
log. cos. δ	9, 9625076
log. cos. λ cos. δ	9, 6623517

$$\log. \frac{\sin. 33'}{\cos. \lambda' \cos. \delta} \dots \dots \dots 8, 3198817$$

$$- \frac{\sin. 33'}{\cos. \lambda' \cos. \delta} \dots \dots \dots -0, 020887$$

$$\log. \tan. \lambda' \dots \dots \dots 10, 2373944$$

$$\log. \tan. \delta \dots \dots \dots 9, 6376106$$

$$\log. \tan. \lambda' \tan. \delta \dots \dots \dots 9, 8750050$$

$$- \tan. \lambda' \tan. \delta \dots \dots \dots -0, 74990$$

Quare $\cos. h' = -0, 020887 - 0, 7499 = -0, 770787$,
& consequenter $h' = 140^\circ 25'$.

Quum vero assumpto circuli radio = 1, semiperiph-
eria sit 3, 14159, convertitur arcus semidiurnus h in
partes radii ope analogiae $180^\circ : 116^\circ 51' :: 10800'$
 $: 7011' :: 3, 14159 : h = 2, 0394$; sicque per al-
teram analogiam $180^\circ : 140^\circ 25' :: 10800' : 8425'$
 $:: 3, 14159 : h' = 2, 4507$. Inventis porro arcubus
semidiurnis h, h', quoniam in hac hypothese est $D = D'$,
& $\delta = \delta'$, oritur ideo $C : C' :: \sin. h \cos. \lambda \cos. \delta$
 $+ h \sin. \lambda \sin. \delta : \sin. h' \cos. \lambda' \cos. \delta + h' \sin. \lambda' \sin. \delta$,
feu dividendo per $\cos. \delta$, fit $C : C' ::$
 $\sin. h \cos. \lambda + h \sin. \lambda \tan. \delta : \sin. h' \cos. \lambda' + h' \sin. \lambda' \tan. \delta$

Erit itaque

$$\log. \sin. h \dots \dots \dots 9, 9504583$$

$$\log. \cos. \lambda \dots \dots \dots 9, 8480909$$

log. fin. h cos. λ	9, 7985492
fin. h cos. λ	0, 62885
log. h	0, 3095024
log. fin. λ	9, 8508702
log. tang. δ	9, 6376106
log. h fin. λ tang. δ	9, 7979832
h fin. λ tang. δ	0, 62803
fin. h cos. λ + h fin. λ tang. δ	1, 25688

log. fin. h'	9, 8042757
log. cos. λ'	9, 6998441
log. fin. h' cos. λ'	9, 5041198
fin. h' cos. λ'	0, 31924
log. h'	0, 3892902
log. fin. λ'	9, 9372385
log. tang. δ	9, 6376106
log. h' fin. λ' tang. δ	9, 9641393
h' fin. λ' tang. δ	0, 92074
fin. h' cos. λ' + h' fin. λ' tang. δ	1, 23998

Quamobrem oritur C : C' :: 1, 25688 : 1, 23998,

hoc est TICINI calor diei solstitialis aestivi se habet ad calorem ejusdem diei PETROPOLI, quemadmodum fere 126 ad 124 : quod sane mirum esse non debet, quum in hac hypothese ejus dumtaxat caloris habeatur ratio, qui die unico solstitiali cumulatur, secluso penitus calore diebus omnibus praecedentibus collecto.

II. Quaeratur secundo loco in eadem Urbe TICINO proportio caloris diei aestivi solstitialis, & diei solstitialis hyberni seu ratio $C : C'$. In hac hypothese habetur

$$C : C' :: \frac{\sin. h \cos. \lambda \cos. \delta + h \sin. \lambda \sin. \delta}{D^2} : \frac{\sin. h' \cos. \lambda \cos. \delta - h' \sin. \lambda \sin. \delta}{D'^2}, \text{ videlicet}$$

$$C : C' :: \frac{\sin. h + h \tan. \lambda \tan. \delta}{D^2} : \frac{\sin. h' - h' \tan. \lambda \tan. \delta}{D'^2}$$

Constat autem ex Astronomicis Tabulis, logarithmum distantiae Solis a Terra aestivi solstitii die, hoc est log. D aequari 0, 007161, & logarithmum ejus distantiae solstitii hyemalis die, nimirum log. D' aequalem esse 9, 992716, assumpta distantia mediocri = 1. Hinc igitur consequimur

sin. h		0, 8921920
log. h		0, 3095024
log. $\tan. \lambda \tan. \delta$		9, 6403899

log. h tang. λ tang. δ	9, 9498923
h tang. λ tang. δ	0, 8910300
fin. h + h tang. λ tang. δ	1, 7832220
log. (fin. h + h tang. λ tang. δ)	0, 2512001
log. D ²	0, 0143220
log. $\frac{\text{fin. h} + h \text{ tang. } \lambda \text{ tang. } \delta}{D^2}$	0, 2368781
$\frac{\text{fin. h} + h \text{ tang. } \lambda \text{ tang. } \delta}{D^2}$	1, 7253

Postremus analogiae terminus supputabitur invento prius h' , seu arcu semidiurno hyemalis solstitii tempore; habetur autem $\cos. h' = - \frac{\sin. 33'}{\cos. \lambda \cos. \delta} + \text{tang. } \lambda \text{ tang. } \delta = - 0, 014847 + 0, 43691 = 0, 422063$; atque inde $h' = 65^\circ 2'$, qui in partes radii conversus evadit = 1, 1350. Jam igitur nanci-

fin. h'	0, 9065535
log. h'	0, 0549959
log. tang. λ tang. δ	9, 6403899
log. h' tang. λ tang. δ	9, 6953858
— h' tang. λ tang. δ	— 0, 49589

$\sin. h' - h' \text{ tang. } \lambda \text{ tang. } \delta$		0, 4106635
$\log. (\sin. h' - h' \text{ tang. } \lambda \text{ tang. } \delta)$		9, 6134860
$\log. D'^2$		9, 9854320
$\log. \frac{\sin. h' - h' \text{ tang. } \lambda \text{ tang. } \delta}{D'^2}$		9, 6280540
$\frac{\sin. h' - h' \text{ tang. } \lambda \text{ tang. } \delta}{D'^2}$		0, 42467

Propterea fit $C : C' :: 1, 7253 : 0, 42467$, nimirum aestivus diei solstitialis calor Ticini invenitur plus quam quadruplo major calore hyberno diei solstitialis oppositi.

12 Reliquum est, ut tabulam supputemus exhibentem comparisonem Caloris diurni Æquatorii, & Polaris pro singulis Solis declinationibus ab 1° ad $23^\circ 28'$. Ad hoc praeftandum animadverto, caloris expressionem $\sin. h \cos. \lambda \cos. \delta + h \sin. \lambda \sin. \delta$ sub Æquatore mutari in $\sin. h \cos. \delta$ ob $\lambda = 0$, alteramque expressionem caloris sub Polo $\sin. h' \cos. \lambda' \cos. \delta + h' \sin. \lambda' \sin. \delta$ abire in $h' \sin. \delta$ ob $\lambda' = 90^\circ$. Hinc itaque se prodit proportio $C : C' :: \sin. h \cos. \delta : h' \sin. \delta :: \sin. h : h' \text{ tang. } \delta$. Perspicuum porro est, sub Polo fieri $h' = 180^\circ$, seu in partibus radii, $h' = 3, 14159$, adeoque $C : C' :: \sin. h : 3, 14159 \text{ tang. } \delta$.

Invenitur autem h pro singulis Solis declinationibus

$$\text{ex formula (§ 10) } \cos. h = - \frac{\sin. 33'}{\cos. \lambda \cos. \delta} - \text{tang. } \lambda \text{ tang. } \delta,$$

quae ob $\lambda = 0$ degenerat in $\cos. h = - \frac{\sin. 33'}{\cos. \delta}$. Ex hisce facile construitur sequens

TABULA COMPARATIVA

Caloris diurni Aequatorii, & Polaris
pro singulis Solis declinationibus.

<i>Declinatio Solis seu δ</i>	<i>Arcus semi- diurnus sub Aequatore, seu h</i>	<i>Calor diurnus Aequatorius seu $\sin. h$</i>	<i>Calor diurnus Polaris seu $3, 14159 \text{ tang. } \delta$</i>
1° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,054837
2° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,10971
3° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,16464
4° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,21968
5° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,27485

<i>Declinatio</i>	<i>Arcus semi-</i>	<i>Calor diurnus</i>	<i>Calor diurnus</i>
<i>Solis seu δ</i>	<i>diurnus sub</i>	<i>Aequatorius seu</i>	<i>Polaris seu</i>
	<i>Aequatore,</i>	<i>fin. h</i>	<i>3, 14159 tang. δ</i>
	<i>seu h</i>		
6° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,33020
7° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,38574
8° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,44152
9° . .	90° 33'	0,999954 . .	0,49758
10° . .	90° 34'	0,999951 . .	0,55395
11° . .	90° 34'	0,999951 . .	0,61067
12° . .	90° 34'	0,999951 . .	0,66777
13° . .	90° 34'	0,999951 . .	0,72530
14° . .	90° 34'	0,999951 . .	0,78329
15° . .	90° 34'	0,999951 . .	0,84179
16° . .	90° 34'	0,999951 . .	0,90084
17° . .	90° 35'	0,999948 . .	0,96048
18° . .	90° 35'	0,999948 . .	1,02077
19° . .	90° 35'	0,999948 . .	1,08174
20° . .	90° 35'	0,999948 . .	1,14345
21° . .	90° 35'	0,999948 . .	1,20594

<i>Declinatio</i>	<i>Arcus semi-</i>	<i>Calor diurnus</i>	<i>Calor diurnus</i>
<i>Solis seu δ</i>	<i>diurnus sub</i>	<i>Aequatorius seu</i>	<i>Polaris seu</i>
	<i>Aequatore,</i>	<i>sin. h</i>	<i>3,14159 tang. δ</i>
	<i>seu h</i>		
22° . .	90° 36'	0,999945 . .	1,26929
23° . .	90° 36'	0,999945 . .	1,33353
23° 28'	90° 36'	0,999945 . .	1,36414



DISQUISITIO III.

DE CALORE ANNUO SOLARI.

1. **Q**Uam in praecedenti Disquisitione Caloris Diurni vim ac mensuram in variis Terrae locis rite supputaverimus, ejusdemque comparisonem sub Aequatore & Polo pro singulis Solis declinationibus luculenter deduxerimus, reliquum nunc est, ut *Annuum* quoque Calorem in utroque loco expendamus, ejusque intensiorem accurata quoad fieri potest analysi dimetiamur.

2. Ut autem in hac paullo abstrusiori indagine ordinatim ac tuto progrediamur, necesse est in antecessum constituere, radiorum solarium numerum tempore quovis finito in Terram illabentium rationem directam sequi anguli illius, quem interea temporis Terra circa Solem describit: quod quidem elegans Theorema ita breviter demonstratur: Accipiat in Orbita Terrestri, sive Ecliptica *APBF* arcus infinitesimus *Pp*, ductisque ab umbilico, seu centro Solis *S* radiis vectoribus *SP*, *Sp* describatur minimus circuli arcus *Pg*, qui trianguli infinitesimi *PSp* altitudinem

Fig. 2.

repraesentabit accepto latere Sp pro basi; inde vero triangulum ipsum invenitur aequale facto $\frac{1}{2} Sp \cdot Pg$, vel $\frac{1}{2} SP \cdot Pg$. Porro ex Kepleriana Lege areola PSp , hoc est factum $\frac{1}{2} SP \cdot Pg$ exprimit tempus, quo Tellus minimum Eclipticae arcum Pp describit: ac praeterea perspicuum est, radiorum solarium numerum momento temporis in Terram illabentium esse ut tempusculum directe, & distantiae quadratum inverse. Igitur radiorum numerus in Terram irruentium eo tempusculo, quo Tellus movetur per minimum arcum Pp , erit uti $\frac{\frac{1}{2} SP \cdot Pg}{SP^2}$, hoc est uti $\frac{Pg}{SP}$. Est autem circuli arcus Pg ut semidiameter SP , & angulus PSg conjunctim; consequenter numerus ille radiorum fit uti $\frac{PSg \cdot SP}{SP}$, nimirum uti angulus PSg . Quum id singulis momentis contingat, liquet, numerum radiorum, qui tempore quolibet finito in Terram emittuntur, dum ex. gr. Tellus Eclipticae arcum AP percurrit, fore uti angulus ASP interea descriptus.

3. Hoc in antecessum posito, cogitemus nunc triangulum sphaericum rectangulum ex tribus arcibus Circulorum Sphaerae Maximorum, Eclipticae, Aequatoris, & Declinationis; cujus quidem trianguli hypotenusa est arcus Eclipticae ab initio Arietis usque

ad Solis locum, nimirum longitudo Solis, latus unum, est arcus Circuli Declinationis a Solis loco usque ad Æquatorem, videlicet declinatio Solis, ac latus alterum est arcus Æquatoris ab initio Arietis usque ad Circulum Declinationis. Vocetur jam longitudo Solis ν , Eclipticae obliquitas ϕ , & Solis declinatio δ ; & quum in sphaerico quovis triangulo sinus laterum sint inter se uti sinus angulorum lateribus oppositorum, fiet iccirco

$$1 : \sin. \phi :: \sin. \nu : \sin. \delta.$$

Hinc itaque colligitur $\sin. \delta = \sin. \phi \sin. \nu$, & $\cos. \delta = \sqrt{1 - \sin.^2 \phi \sin.^2 \nu}$. Quum vero Calor diurnus aequatorius in superiori Disquisitione inventus fuerit $= \sin. h \cos. \delta$, & Calor diurnus Polaris $= 3,14159 \sin. \delta = \pi \sin. \delta$, sumpto π pro circuli semiperipheria; eapropter substitutis valoribus modo erutis $\sin. \delta$, & $\cos. \delta$, orietur Calor Æquatorius diurnus $= \sin. h \sqrt{1 - \sin.^2 \phi \sin.^2 \nu}$, & Calor diurnus Polaris $= \pi \sin. \phi \sin. \nu$.

4. Jam vero quum Sol singulis diebus variam longitudinem assequatur, & ejus longitudinis variatio intra diem fat parva sit, uti ex Astronomicis constat, licebit variationem eandem instar differentialis tractare, & aequalem ponere longitudinis elemento $d\nu$. Porro quoniam huic diurnae variationi $d\nu$ (§. 2.)

proportionalis est radiorum Solarium numerus intra diei spatium in Terram vibratorum, perspicuum est, si calor diurnus Æquatoris, & Poli ducatur in dv , gigni elementum caloris annui indefiniti, qui nimirum respondet tempori, quo Sol ad indeterminatam longitudinem v pervenit. Quapropter elementum caloris annui sub Æquatore erit $dv \sin.h \sqrt{(1 - \sin.^2 \phi \sin.^2 v)}$, & sub Polis erit $\pi dv \sin.\phi \sin.v$. Harum formularum integratio ita erit absolvenda, ut integralia evanescant una cum ipsa longitudine v ; fingimus enim, actionem Solis calefacientis tunc incipere cum Sol Arietis signum ingreditur, sive cum nulla est ejusdem longitudo. Caeterum vel me non monente patet, nullam in hoc calculo rationem haberi caloris, qui noctis tempore a corporibus decedit, nullam actionis, qua calor calori additus hujus vim intendit, nullam denique caloris reflexi, qui directum diversimode afficit, augetque vehementer; quae sane omnia in calculum introducta Problema efficerent inextricabile, implexum, & hodiernae Analyfi penitus inaccessum.

5. Quum igitur Calor Æquatorius toto illo tempore indefinito, quo Sol describit Eclipticae arcum v exprimatur integrali formula $\int dv \sin.h \sqrt{(1 - \sin.^2 \phi \sin.^2 v)}$; ad hujus formulae integrationem rite absolvendam animadverto esse $\sqrt{(1 - \sin.^2 \phi \sin.^2 v)} = 1 - \frac{\sin.^2 \phi \sin.^2 v}{2}$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin^4 \phi \sin^4 v}{2.2.2.} - \frac{\sin^6 \phi \sin^6 v}{2.2.2.2.} - \frac{5 \sin^8 \phi \sin^8 v}{2.2.2.2.2.4} \\
& \frac{7 \sin^{10} \phi \sin^{10} v}{2.2.2.2.2.2.4} - \frac{7.9 \sin^{12} \phi \sin^{12} v}{2.2.2.2.2.2.2.4.6} \\
& \frac{9.11 \sin^{14} \phi \sin^{14} v}{2.2.2.2.2.2.2.2.4.6} - \frac{9.11.13 \sin^{16} \phi \sin^{16} v}{2.2.2.2.2.2.2.2.2.4.6.8} \\
& \frac{11.13.15 \sin^{18} \phi \sin^{18} v}{2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.4.6.8} - \&c.
\end{aligned}$$

Tum duco terminos hosce omnes in $dv \sin.h$, & singulorum productorum integrationem aggredior.

6. Itaque constat ex Integrali Calculo, esse

I.

$$S dv \sin.h = v \sin.h$$

II.

$$S dv \sin^2 v = -\frac{1}{2} \sin.v \cos.v + \frac{1}{2} v; \text{ atque iccirco}$$

$$-\frac{1}{2} \sin.h \sin^2 \phi S dv \sin^2 v = \frac{\sin.h \sin^2 \phi \sin.v \cos.v}{2.2}$$

$$-\frac{v \sin.h \sin^2 \phi}{2.2}$$

III.

$$S dv \sin^4 v = -\frac{1}{4} \sin^3 v \cos.v - \frac{3 \sin.v \cos.v}{2.4} + \frac{3v}{2.4};$$

$$-\frac{\sin.h \sin^4 \phi}{2.2.2} S dv \sin^4 v = \frac{\sin.h \sin^4 \phi \sin^3 v \cos.v}{2.2.2.4}$$

B 3

$$+ \frac{3 \sin.h \sin^4 \phi \sin.v \cos.v}{2.2.2.2.4} - \frac{3 v \sin.h \sin^4 \phi}{2.2.4.4.}$$

$$S dv \sin^6 \phi = -\frac{1}{6} \cos.v \sin^5 v - \frac{5 \cos.v \sin^3 v}{4.6}$$

$$- \frac{5.3 \cos.v \sin.v}{2.4.6} + \frac{5.3v}{2.4.6};$$

$$- \frac{\sin.h \sin^6 \phi}{2.2.2.2.2} S dv \sin^6 v = \frac{\sin.h \sin^6 \phi \cos.v \sin^5 v}{2.2.2.2.6}$$

$$+ \frac{5 \sin.h \sin^6 \phi \cos.v \sin^3 v}{2.2.2.2.4.6} + \frac{5.3 \sin.h \sin^6 \phi \cos.v \sin.v}{2.2.2.2.2.4.6}$$

$$- \frac{5.3v \sin.h \sin^6 \phi}{2.2.2.2.2.4.6}$$

v.

$$S dv \sin^8 v = -\frac{1}{8} \cos.v \sin^7 v - \frac{7 \cos.v \sin^5 v}{6.8}$$

$$- \frac{7.5 \cos.v \sin^3 v}{8.6.4} - \frac{7.5.3 \cos.v \sin.v}{8.6.4.2} + \frac{7.5.3v}{8.6.4.2};$$

$$- \frac{5 \sin.h \sin^8 \phi}{2.2.2.2.2.4} S dv \sin^8 v = \frac{5 \sin.h \sin^8 \phi \cos.v \sin^7 v}{2.2.2.2.2.4.8}$$

$$+ \frac{5.7 \sin.h \sin^8 \phi \cos.v \sin^5 v}{2.2.2.2.2.4.6.8} + \frac{5.5.7 \sin.h \sin^8 \phi \cos.v \sin^3 v}{2.2.2.2.2.4.4.6.8}$$

$$+ \frac{3.5.5.7 \sin.h \sin^8 \phi \cos.v \sin.v}{2.2.2.2.2.2.4.4.6.8} - \frac{3.5.5.7v \sin.h \sin^8 \phi}{2.2.2.2.2.2.4.4.6.8}$$

vi.

&c.

Accipiat^r jam horum terminorum summa, & vo-
cetur A coefficiens producti $\cos.v \sin.v$, B coefficiens
producti $\cos.v \sin.^3v$, C coefficiens producti $\cos.v \sin.^5v$,
 D coefficiens producti $\cos.v \sin.^7v$, atque ita porro:

$$\begin{aligned} \text{hinc habetur } \int dv \sin.h \sqrt{(1 - \sin.^2\phi \sin.^2v)} \\ = A \cos.v \sin.v + B \cos.v \sin.^3v + C \cos.v \sin.^5v \\ + D \cos.v \sin.^7v + \&c. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} + \sin.h \\ - \frac{\sin.h \sin.^2\phi}{2.2} \\ - \frac{3\sin.h \sin.^4\phi}{2.2.4.4} \\ - \frac{3.3.5\sin.h \sin.^6\phi}{2.2.4.4.6.6} \\ - \frac{3.3.5.5.7\sin.h \sin.^8\phi}{2.2.4.4.6.6.8.8} \\ - \&c. \end{array} \right\} v$$

In hac integratione constans nulla addenda est, quod
evanescente v Calor omnis una cum integrali indefi-
nito evanescit.

7. Quum porro integrale modo inventum exhibeat
Calorem Solis Æquatorium toto illo tempore indeter-
minato, quo Sol ab initio Arietis indefinitam longitu-
dinem v adipiscitur, facile jam erit Calorem invenire
tempori cuivis determinato respondentem. Quaeratur
ex. gr. Calor sub Æquatore per totum tempus Anni

dimidii : In hac hypothefi fit $\nu = 180^\circ = \pi$, & in praecedenti formula ob $\sin. \nu = 0$, evanescunt termini omnes praeter ultimum, qui convertitur

$$\text{in } \pi \sin. h \left(1 - \frac{\sin^2 \phi}{2.2} - \frac{3 \sin^4 \phi}{2.2.4.4} - \frac{3.3.5 \sin^6 \phi}{2.2.4.4.6.6} - \frac{3.3.5.5.7 \sin^8 \phi}{2.2.4.4.6.6.8.8} - \&c. \right) = \text{Calori } \text{Æquatorio per}$$

dimidium annum; proindeque Calor sub Æquatore per annum integrum repraesentatur a duplo ipsius formu-

$$\text{lae, nimirum } 2 \pi \sin. h \left(1 - \frac{\sin^2 \phi}{2.2} - \frac{3 \sin^4 \phi}{2.2.4.4} - \frac{3.3.5 \sin^6 \phi}{2.2.4.4.6.6} - \frac{3.3.5.5.7 \sin^8 \phi}{2.2.4.4.6.6.8.8} - \&c. \right), \text{ quae fa-}$$

ne quantitas seriem complectitur valde convergentem, ut per se liquet.

8. Praeterea inventus est (§. 4.) Calor Polaris $= \int \pi d\nu \sin. \phi \sin. \nu$, nimirum, facta integratione, $= -\pi \sin. \phi \cos. \nu + \text{Const.}$ Oritur autem Const. $= \pi \sin. \phi$, quod posito $\nu = 0$, etiam Calor fit nihilo aequalis. Quamobrem invenitur Polaris Calor $= \pi \sin. \phi (1 - \cos. \nu)$. Si jam sumitur $\nu = 180^\circ$, prodit $\cos. \nu = -1$, & $-\cos. \nu = 1$; atque ideo quantitas $\pi \sin. \phi (1 - \cos. \nu)$ mutatur in $2 \pi \sin. \phi$. Eapropter Polaris Calor sex integris mensibus perseverans repraesentatur quantitate $2 \pi \sin. \phi$, quae sane

quantitas Calorem quoque totius anni indigitabit, quum altero anni dimidio Sol sit Polo inconspicuus, & infra horizontem delitefcet.

9. Hinc itaque habetur comparatio Caloris annui sub Æquatore, & Polo; est enim annuus Æquatoris Calor ad annum Poli Calorem quemadmodum est

$$2 \pi \sin. h \left(1 - \frac{\sin.^2 \varphi}{2.2} - \frac{3 \sin.^4 \varphi}{2.2.4.4} - \frac{3.3.5 \sin.^6 \varphi}{2.2.4.4.6.6} \right. \\ \left. - \frac{3.3.5.5.7 \sin.^8 \varphi}{2.2.4.4.6.6.8.8} - \&c. \right) \text{ ad } 2 \pi \sin. \varphi, \text{ sive uti } \sin. h \\ \left(1 - \frac{\sin.^2 \varphi}{2.2} - \frac{3 \sin.^4 \varphi}{2.2.4.4} - \&c. \right) \text{ ad } \sin. \varphi, \text{ hoc est} \\ \text{uti } P \sin. h \text{ ad } \sin. \varphi, \text{ posito fcilicet } P = 1 - \frac{\sin.^2 \varphi}{2.2}$$

$$- \frac{3 \sin.^4 \varphi}{2.2.4.4} - \&c. \text{ Ut itaque utriusque Caloris compa-}$$

ratio ad numeros transferatur, animadverto, arcum semidiurnum sub Æquatore pro varia Solis declinatione aliquam licet parvam variationem subire; nam in Tabula praecedentis Disquisitionis §. 12. novies invenitur $h = 90^\circ 33'$, septies occurrit $h = 90^\circ 34'$, quinquies reperitur $h = 90^\circ 35'$, demum terprehenditur $h = 90^\circ 36'$; atque hinc medius ipsius h valor prodit circiter $90^\circ 34'$. Ecce jam calculi typus

$\varphi = 23^{\circ} 28'$		$h = 90^{\circ} 34'$
$\log. \sin. \varphi$		9,6001181
$\log. \sin^2 \varphi$		9,2002362
$\log. 4$		0,6020600
$\log. \frac{\sin^2 \varphi}{2.2}$		8,5981762
$\frac{\sin^2 \varphi}{2.2}$		— 0,039644
$\log. \sin^4 \varphi$		8,4004724
$\log. 3$		0,4771213
$\log. 3 \sin^4 \varphi$		8,8775937
$\log. 2.2.4.4$		1,8061800
$\log. \frac{3 \sin^4 \varphi}{2.2.4.4}$		7,0714137
$\frac{3 \sin^4 \varphi}{2.2.4.4}$		— 0,001179
$\log. \sin^6 \varphi$		7,6007086
$\log. 3.3.5$		1,6532125
$\log. 3.3.5 \sin^6 \varphi$		9,2539211
$\log. 2.2.4.4.6.6$		3,3624825
$\log. \frac{3.3.5 \sin^6 \varphi}{2.2.4.4.6.6}$		5,8914386

$$\begin{aligned}
 & \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \sin^6 \varphi}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6} \dots \dots \dots - 0,000078 \\
 & \log. \sin^8 \varphi \dots \dots \dots 6,8009448 \\
 & \log. 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \dots \dots \dots 3,1972806 \\
 & \log. 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \sin^8 \varphi \dots \dots \dots 9,9982254 \\
 & \log. 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots \dots \dots 5,1686625 \\
 & \log. \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \sin^8 \varphi}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8} \dots \dots \dots 4,8295629 \\
 & \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \sin^8 \varphi}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8} \dots \dots \dots - 0,000007
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Est igitur } P &= 1 - 0,039644 - 0,001179 - 0,000078 \\
 &- 0,000007 = 0,959092.
 \end{aligned}$$

Quare

$$\begin{aligned}
 \log. P &\dots \dots \dots 9,9818603 \\
 \log. \sin. h &\dots \dots \dots 9,9999788 \\
 \log. P \sin. h &\dots \dots \dots 9,9818391 \\
 P \sin. h &\dots \dots \dots 0,959045 \\
 \sin. \varphi &\dots \dots \dots 0,398215
 \end{aligned}$$

Quapropter Calor Annuus Æquatorius se habet ad annum Poli Calorem ut 959045 ad 398215, sive ut 959 ad 398 vel proxime ut 17 ad 7, & semestris utrimque Calor ut 17 ad 14.

10. Formulae $\int dv \sin. v \sqrt{(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 v)}$ consideratio elegantissimam ac prorsus miram patefacit Ellipseos proprietatem, & cum annuo Solis Calore in regionibus aequatoriis analogiam atque consensum. Si enim ellipsis describatur, cujus femiaxis major fit unitati aequalis, excentricitas vero sinum obliquitatis Eclipticae adaequet, & huic Ellipsi circulus circumscribatur radium habens femiaxi majori aequalem; Ellipseos perimeter ducta in sinum arcus semidiurni sub Aequatore, sive in sinum $90^\circ 34'$ Calorem Aequatoris annum repraesentat, circuli vero circumscripti peripheria ducta in Ellipsis excentricitatem Calorem annum Polarem exprimit. Reapse femiaxe majori $CP = 1$, excentricitate $FC = \sin. \varphi$ describatur femiellipsis PEQ , & radio eodem PC semicirculus POQ , & producantur in O , & M femiaxis minor CE , & ordinata DN . Accepto arcu $OM = v$, seu Solis longitudini, oritur $DC = \sin. v$, $MD = \cos. v = \sqrt{(1 - \sin^2 v)}$. Est autem ex natura Ellipsis $EC = \sqrt{(PC^2 - FC^2)} = \sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)}$, & $OC : EC :: MD : ND$, sive $1 : \sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)} :: \sqrt{(1 - \sin^2 v)} : \cos. \varphi \cos. v$. Igitur $ND = \cos. \varphi \cos. v$. Capiatur jam differentiale ordinatae ND , quod est $-dv \sin. v \cos. \varphi$, seu $-dv \sin. v \sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)}$, hujusque quadratum $dv^2 \sin^2 v (1 - \sin^2 \varphi)$, tum differentiale abscissae centralis

Fig. 3

CD , quod invenitur $dv \cos. v$, five $dv \sqrt{(1 - \sin^2 v)}$, & hujus quadratum $dv^2(1 - \sin^2 v)$: Summa hujusmodi quadratorum oritur $= dv^2(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 v)$, & ejus radix quadrata praebet elementum arcus Elliptici EN ; ac pro-

inde detegitur arcus ipse $EN = \int dv \sqrt{(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 v)}$, in qua sane expressionem integrali si accipitur $v = 360^\circ$, five $=$ circuli peripheriae, abit EN in perimetrum totam Ellipsis. Igitur in hypothese $v = 360^\circ$ se habet

$\int dv \sin. h \sqrt{(1 - \sin^2 \varphi \sin^2 v)}$ ad $2\pi \sin. \varphi$, quemadmodum Calor annuus Aequatoris ad Calorem annum Poli; nimirum ut praedictae Ellipsis perimeter ducta in $\sinum 90^\circ 34'$ se habet ad peripheriam circuli circumscripti ductam in Ellipsis excentricitatem, ita Calor Aequatorius ad Polarem.

11. Liceat hic obiter animadvertere, ex evolutione quantitatis P , seu seriei $1 - \frac{\sin^2 \varphi}{2.2} - \frac{3 \sin^4 \varphi}{2.2.4.4} - \&c.$

(§. 9.) prodire rationem inter perimetrum Ellipsis PEQ , & peripheriam circuli POQ , quippe Ellipsis perimeter invenitur $= 2\pi P = 2\pi \times 0,959092$, & circuli circumscripti peripheria $= 2\pi$. Igitur perimeter Ellipsis est ad circuli peripheriam uti $2\pi \times 0,959092$ ad 2π , five ut 959092 ad 1000000 , vel ut 24 ad 25 fere.

12. Celeberrimus Geometra, & Astronomus To-

bias **MAYERUS**, ut Caloris Medii quantitatem non modo sub Æquatore & Polo, sed in omnibus Terrae locis & sub quacumque latitudine definiret, formulam proposuit simplicem oppido & elegantem, ad cuius formulae ductum Tabulas binas construxit, quae medium Caloris gradum secundum Scalas Thermometri Reaumuriani, & Fahrenheitiani in variis latitudinibus repraesentant. Praestat ipsum hac de re perspicue differentem audire: *Primum ergo constat (inquit ille) in unoquoque locorum terrestrium certum definitumque regnare caloris gradum, qui medium tenet inter aestivum & hybernum, itemque inter diurnum & nocturnum, atque a climate, cui locus subjacet, sive elevatione poli ejus loci pendet. Uti enim radii solares eo obliquiores in superficiem terrae incidunt, quo magis ab aequatore sunt remoti; ita minorem esse oportet hunc medium caloris gradum in locis majoris latitudinis. Facile autem ostendi potest, si gradus medius secundum scalam thermometri cujuslibet sub Æquatore ponatur $= m$, sub polis vero $= m - n$, fore gradum medium sub latitudine quavis ϕ proxime $= m - n \sin^2 \phi$; sive differentiam inter calorem medium sub aequatore & eum, qui loco latitudinis ϕ convenit, esse in ratione duplicata sinus latitudinis. Hinc igitur, cognito gradu medio sub duabus diversis latitudinibus, licebit definire valores litterarum m & n , ac pro-*

inde gradum medium sub alia quacumque latitudine (a).

13. Hisce positis statuit MAYERUS gradum caloris medium in locis depressioribus Aequatori proximis esse gr. 24. in scala Thermometri Reaumuriani, sub latitudine vero 49° , aut 50° eundem esse gr. 9 supra congelationis terminum, quantum quidem MAYERO ex aliqua comparatione observationum thermometricarum sub his latitudinibus institutarum licuit colligere. Hinc vero deducitur aequatio $9 = m - n \sin^2 \varphi = 24 - n \sin^2 49^\circ = 24 - \frac{9}{8} n$, sive $n = 26\frac{2}{3}$, & hac subtracta a calore medio sub Aequatore, seu a 24, oritur gradus caloris medius sub Polis $= -2\frac{2}{3}$ infra congelationis limitem. At ob observationes neque summe accuratas, neque summa cura inter se comparatas, loco $-2\frac{2}{3}$ assumit MAYERUS gradum medium sub Polis $= 0$, talem nempe, quo aqua incipit congelari. Proinde assumpto tam m quam $n = 24$, oritur medius caloris gradus sub latitudine quavis φ hac forma repraesentatus $24 (1 - \sin^2 \varphi) = 24 \cos^2 \varphi = 12 + 12 \cos. 2\varphi$, quae sequentem Tabulam largitur.

(a) Vid. Tobiae MAYERI *Opera Inedita* Vol. I. pag. 4. Gottingae 1775.

TABULA CALORIS MEDII

Secundum Scalam Reaumurianam.

<i>Latitudo Locī</i>	<i>Gr.</i>	<i>Gradus Therm.</i>	<i>Reaum.</i>
0	0	24	
5	5	$23 \frac{1}{4}$	
10	10	$23 \frac{1}{2}$	
15	15	$22 \frac{1}{2}$	
20	20	$21 \frac{1}{2}$	
25	25	$19 \frac{1}{2}$	
30	30	18	
35	35	16	
40	40	14	
45	45	12	
50	50	10	
55	55	8	
60	60	6	
65	65	$4 \frac{1}{4}$	
70	70	$2 \frac{1}{4}$	
75	75	$1 \frac{1}{4}$	
80	80	$0 \frac{1}{4}$	
85	85	$0 \frac{1}{4}$	
90	90	0	

14. Assumpta scala alia quacumque, quae datam habeat rationem ad Reaumurianam, facilis negotii res erit secundum scalam hanc novam ex praemissa formula tabulam construere Caloris medii sub quacumque latitudine repraesentatricem. Quum itaque in Scala Fahrenheitiana gradus 84 respondeant gradibus 24 Reaumurianae, & congelationis gradus in illa sit 32, invenitur medius caloris gradus sub latitudine ϕ hac forma expressus $84 - 52 \sin^2 \phi = 84 - 52 + 52 \cos^2 \phi = 32 + 52 \cos^2 \phi = 32 + 26 + 26 \cos 2\phi = 58 + 26 \cos 2\phi$, ad cuius ductum sequens contextitur

TABULA CALORIS MEDII

Secundum Scalam Fahrenheitianam

<i>Latitudo Loci</i>	<i>Gr.</i>	<i>Gradus Therm.</i>	<i>Fahrenheit.</i>
0		84	
5		$83 \frac{1}{2}$	
10		$82 \frac{1}{2}$	
15		$80 \frac{1}{2}$	
20		78	
25		$74 \frac{1}{2}$	

C

Latitudo Loci		Gradus Therm.
Gr.		Fahrenheit.
30		71
35		67
40		62 $\frac{1}{2}$
45		58
50		53 $\frac{1}{2}$
55		49
60		45
65		41 $\frac{1}{2}$
70		38
75		35 $\frac{1}{2}$
80		33 $\frac{1}{2}$
85		32 $\frac{1}{2}$
90		32

15. *Atque hic est, inquit MAYERUS, gradus caloris medius loci cujuscumque loco medio planetarum in astronomicis non inepte comparandus. Quemadmodum autem Astronomi solent huic loco medio plures aequationes applicare, atque adeo magis magisque ad veram adpropinquare: ita simili quoque modo correctiones, quibus gradus caloris medius ad verum possit reduci, investigandae sunt. Quum itaque calor ab ima terrae superficie ascendendo sensim sensimque minuatur ad certam uf-*

que altitudinem, ultra quam incipit rursus augeri, hocque caloris in majoribus altitudinibus decrementum tum montes vel in ipsa Zona Torrida perpetua nive geluque rigentes, tum notissimae Gallorum Mathematicorum observationes in Peruvianis montibus prope Aequatorem institutae aperte demonstrent; inde correctionem praecipuam MAYERUS deduxit ab altitudine loci petitam, posuitque interim caloris gradum a superficie maris ascendendo decrescere in ea ratione qua augetur altitudo: quo nixus fundamento hanc facillimi usus regulam condidit: „ Si data elevatione loci supra maris superficiem ejusque latitudine geographica investigandus sit gradus caloris illius loci medius, quaeratur primum ad datam latitudinem gradus medius secundum scalam Reaumurianam sive per formulam supra traditam, sive ex tabula ibidem exposita; deinde altitudinis loci in hexapedis Parisinis expressae pars centesima, quae correctionem hanc primam exhibet, ab illo gradu auferatur, residuum erit gradus medius dati loci quaesitus “. .

16. Verum dolendum est, ingeniosissimam MAYERI methodum non usque adeo generalem esse, ut omnibus terrae locis climatibusque conveniat; nam adnotante Mayerani operis editore LICHTENBERGIO consensus inter altitudines medias Thermometri observatas, &

computatas magnus utique est in toto illo terrarum tractu, qui parallelum Promontorii Bonae Spei, & Holmientem, nec non meridianum Holmientem, & Mexicanum interjacet: Hisce vero limitibus praetergressis formula Mayeriana a veritate longe aberrat, ita ut altitudines mediae Thermometri PETROPOLI & WILNAE V. C. observatae deficient, illa gradibus 8, 5; haec 10, 3 ab ea, quam Mayeriana formula praebet.

17. Caeterum in inventione formulae $12 + 12 \cos. 2 \phi$ videtur MAYERUS eo praesertim respexisse, ut calor medius sub Aequatore *Maximus*, sub Polis *Minimus* inde consequeretur; cui quidem conditioni formula ipsa satisfacit, nam ejus differentiale $- 24 d\phi \sin. 2 \phi$ nihilo aequatum duos praebet latitudinis ϕ valores, alterum $\phi = 0$, alterum $\phi = 90^\circ$, quorum prior Aequatorem, posterior Polum designat. Ex priori autem 78ϕ valore haberi Maximum, ex secundo Minimum vel inde patet, quod secunda differentia $- 48 d\phi^2 \cos. 2 \phi$ negativa sit, seu $- 48 d\phi^2$ sumpto $\phi = 0$, & contra affirmativa, scilicet $+ 48 d\phi^2$ facto $\phi = 90^\circ$. Verum hujusmodi conditionis complementum, quo niti Mayeriana formula videtur, pro accurato formulae ipsius examine haberi nullo modo potest, quum alia multo generalior $a + b \cos. 2 \phi + c \cos. 4 \phi + d \cos. 6 \phi + \&c.$ eandem conditionem aequè impleat.

18. Inventa jam in praecedenti Disquisitione formula $2 \sin. h \cos. \lambda \cos. \delta \pm 2h \sin. \lambda \sin. \delta$ exprimente Calorem Solis Diurnum pro qualibet Solis declinatione, & latitudine terrestri; & cautione adhibita usurpandi secundum formulae terminum cum signo affirmativo si declinatio & latitudo ejusdem nominis fuerint, cum negativo si diversi; oportet nunc Calorem Solis Annum non sub Aequatore dumtaxat, & Polo, quod antea praestitimus, sed in quacumque elevatione Poli, seu in quolibet Telluris loco supputare ac definire. Utar ad hanc rem eximia NEWTONI methodo *ducendi curvam geometricam per data quocumque puncta*, quam NEWTONUS ad LEIBNITIUM scribens merito inter inventa pulcherrima numerabat, quamque summus Geometra Rogerius COTESIUS insigni Opusculo *De Methodo Differentiali Nevvtoniana* elegantissime demonstravit auxitque. Sumantur itaque in quavis Terrae regione dies bini dimidiato anno a se invicem distantes, in quibus iccirco eadem erit declinatio Solis, sed ejusdem nominis cum latitudine loci pro die uno, diversi nominis pro die altero opposito; vocentur h , h' arcus dierum ipsorum semidiurni: eritque calor diei illius, quo Sol declinationem habet cognominem latitudini, $2 \sin. h \cos. \lambda \cos. \delta + 2h \sin. \lambda \sin. \delta$, calor diei oppositi $2 \sin. h' \cos. \lambda \cos. \delta - 2h' \sin. \lambda \sin. \delta$, & calor

dierum binorum simul $= 2 \cos. \lambda \cos. \delta (\sin. h + \sin. h')$
 $+ 2 \sin. \lambda \sin. \delta (h - h')$. Quum autem ex Trigonome-
 triae formulis habeatur $\sin. h + \sin. h' = 2 \sin. \frac{h + h'}{2} \times$

$$\cos. \frac{h - h'}{2} = 2 \sin. \frac{180^\circ}{2} \cos. \frac{h - h'}{2} = 2 \cos. \frac{h - h'}{2};$$

propterea calor binorum dierum oppositorum fiet

$$= 4 \cos. \lambda \cos. \delta \cos. \frac{h - h'}{2} + 4 \left(\frac{h - h'}{2} \right) \sin. \lambda \sin. \delta.$$

Hic porro calor si diebus singulis ab aequinoctio usque ad solstitium ad hujus praescriptum formulae rite supputetur, assequimur calorem semiannuum, cujus proinde duplum dat calorem integrum anni unius; in quaestione etenim adeo abstrusa, ac tot undique septa difficultatibus postulati loco assumere licet, calorem Solis duabus oppositis anni tempestatibus aggregatum eundem esse cum illo, qui binis aliis tempestatibus oppositis accumulatur. Sed quoniam haec supputatio semel & nonagesies repetita laboris esset ac molestiae plenissima, operae pretium erit, summam illam caloris, qui ab aequinoctio verno ad solstitium aestivum, & ab aequinoctio autumnali ad solstitium hybernum acervatur, per approximationem inquirere. Itaque ex Astronomicis manifestum est, in quolibet Terrae loco data Solis longitudine haberi declinatio-

nem δ ex analogia, uti radius ad sinum longitudinis Solis, ita sinus obliquitatis Eclipticae ad sinum declinationis, seu ad $\sin. \delta$: inventa porro declinatione Solis assequimur differentiam ascensionalem $\frac{h-h'}{2}$ ex altera analogia uti radius ad tangentem latitudinis, ita tangens declinationis ad sinum differentiae ascensionalis. Eapropter assumpta Solis longitudine graduum 0, 15°, 30°, 45°, &c. ac posita Eclipticae obliquitate = 23° ½ (in hac quippe quaestione negligimus minutias), pro Urbe cujus latitudo foret 51° ½ cujusmodi esset GOTTINGA, sequens struitur

T A B E L L A

<i>Solis Longitudo</i>	<i>Declinatio seu δ</i>	<i>Differentia Ascensio- nalis seu $\frac{h-h'}{2}$</i>
0	0	0
15°	5°. 55'	7°. 483
30°	11°. 31'	14°. 816
45°	16°. 23'	21°. 68
60°	20°. 12'	27°. 55
75°	22°. 39'	31°. 63
90°	23°. 30'	33°. 13

19. In tertia hujus tabulae columna differentia ascensionalis exhibetur per gradus, partesque gradus decimales ad majorem subsequentis calculi facilitatem. Inventa jam pro latitudine $51^{\circ} \frac{1}{2}$ tum declinatione Solis tum differentia ascensionali singulis quindecim gradibus longitudinis Solis respondente construitur altera

T A B E L L A

<i>Solis Longitudo</i>	<i>Productum</i>	<i>Productum</i>
	$\cos. \delta \cos. \frac{h - h'}{2}$	$\frac{h - h'}{2} \sin. \delta$
0	1, 0000	0
15°	0, 9862	0, 7723
30°	0, 9473	2, 9537
45°	0, 8915	6, 1128
60°	0, 8321	9, 5138
75°	0, 7857	12, 1827
90°	0, 7505	13, 2107

ubi producta tertiae columnae fiunt multiplicando valorem quemvis $\sin. \delta$ per respondentem differentiam ascensionalem qualis exhibetur in tertia primae tabulae

columna. Sed quoniam in producto $\left(\frac{h - h'}{2} \right) \sin. \delta$

differentia ascensionalis $\frac{h - h'}{2}$ accipienda est non gra-

duum numero expressa, sed radii partibus repraesentata, ut per se palam est; iccirco hujus tertiae columnae numeri reductionem subibunt, quam postmodum indicabimus. Interea spectentur numeri secundae columnae instar septem aequidistantium ordinatarum ad Curvam generis parabolici, cujus area extremis interjecta exhibetur per formulam

$$\frac{41 A + 216 B + 27 C + 272 D}{840} R$$

(a). In hac vero formula designat A summam ordinatarum extimarum, hoc est summam primae, & ultimae $= 1,0000 + 0,7505 = 1,7505$; B summam proximarum extimis, hoc est summam secundae & penultimae $= 0,9862 + 0,7857 = 1,7719$; C summam sequentium, nempe tertiae & antepenultimae $= 0,9473 + 0,8321 = 1,7794$; D quartam ordinatam $= 0,8915$; intervallum denique inter extimas ordinatas, nimirum areae quadrandae basis indigitatur per litteram $R = 91$, quotus scilicet est dierum numerus ab aequinoctio ad solstitium. Ducla itaque hac area in $4 \cos. \lambda$, numerica supputatio dabit $4 Ar. \times \cos. \lambda = 200,56$. Idem fiat in numeris tertiae columnae, per quos rursus septem aequidistantes ordinatae intelliguntur repraesentari, fitque iterum $A = 0 + 13,2107 = 13,2107$; $B = 0,7723 + 12,1827 = 12,9550$; $C = 2,9537 + 9,5138 = 12,4675$; $D = 6,1128$;

(a) Vid. COTES. Opusc. cit. Prop. VI.

$R = 91$. Area hinc per formulam Cotesianam elicenda multiplicari debet per longitudinem arcus gradus unius, hoc est per $0,01745$, eo quod in numeris tertiae columnae factorem $\frac{h-h'}{2}$ involventibus fieri debet

conversio factoris ipsius de numero graduum in partes radii per unitatem designati: quod quidem assequimur per vulgatissimam analogiam

$1^\circ : n^\circ :: 0,01745 : \text{ad quartum} = 0,01745 \times n$, qui longitudinem exprimit arcus numerum n graduum continentis. Ducta autem quantitate $0,01745 \times Ar'$ per $4 \sin. \lambda$, invenietur $4 \times 0,01745 \times Ar' \times \sin. \lambda = 31,96$. Igitur $4 Ar. \times \cos. \lambda + 4 \times 0,01745 \times Ar' \times \sin. \lambda = 200,56 + 31,96 = 232,52$; atque hujus duplum $465,04$ exhibet calorem annum integrum pro elevatione Poli $51^\circ \frac{1}{2}$, cujusmodi est GOTTINGAE, aut LONDINI.

20. Sub Æquinoctiali Circulo, ubi $\lambda = 0$, $\frac{h-h'}{2} = 0$, Caloris quantitas binis diebus semestri spatio distantibus collecta $4 \cos. \lambda \cos. \delta \cos. \frac{h-h'}{2} + 4$

$\left(\frac{h-h'}{2} \right) \sin. \lambda \sin. \delta$ abit in $4 \cos. \delta$. Igitur summam omnium $\cos. \delta$ oportet invenire. Est autem

<i>Longitudo Solis</i>		<i>Declinatio δ</i>		<i>cos. δ</i>
0		0°		1, 0000
15°		5° 55'		0, 9946
30°		11° 30'		0, 9799
45°		16° 23'		0, 9594
60°		20° 12'		0, 9385
75°		22° 39'		0, 9229
90°		23° 30'		0, 9170

Quapropter $A = 1, 9170$; $B = 1, 9175$; $C = 1, 9184$; $D = 0, 9594$; $R = 91$; quibus valoribus in Cotesiana formula substitutis oritur $\text{Area} = 88, 48$: haec autem ducta in 8 exhibet calorem annum aequinoctialem $= 707, 8$. Igitur calor Solis annuus sub Aequatore se habet ad calorem annum LONDINI, vel GORTINGAE uti 708 ad 465, hoc est uti 236 ad 155 quamproxime.

21. Quum in praecedenti Disquisitione Calor diurnus sub Polo inventus sit $= 2 \pi \sin. \delta = 6, 2832 \sin. \delta$, sumpto videlicet π pro circuli semiperipheria; assequemur hac eadem methodo calorem Poli semestrem, vel si mavis annum (altero quippe semestri nullus ob Solis absentiam producit calor), si summa omnium $\sin. \delta$ ab aequinoctio ad proximum solstitium accipia-

tur, eaque ducta in 6, 2832 duplicetur. Ita vero habetur

<i>Longitudo Solis</i>	<i>Declinatio δ</i>	<i>$\sin \delta$</i>
0	0	0
15°	5°. 55'	0, 1031
30°	11°. 30'	0, 1993
45°	16°. 23'	0, 2821
60°	20°. 12'	0, 3453
75°	22°. 39'	0, 3851
90°	23°. 30'	0, 3987

Quamobrem $A=0,3987$; $B=0,4882$; $C=0,5446$; $D=0,2821$; $R=91$: atque hisce valoribus in Coresiana formula subrogatis, prodit area parabolica, quae multiplicata per $2 \times 6,2832$ patefacit semestrem quaesitum Poli calorem $= 2 \times 6,2832 \times Ar. = 269,5$. Est igitur

Calor Annuus

Æquatorius uti	7078
Londinensis, vel Gottingensis	4650
Polaris	2695

22. Sit modo invenienda Caloris Annui mensura in URBE PAPIENSI, in qua scribimus, cujus latitudo, uti notum est, ad $45^\circ : 11'$ pertingit. Est igitur

<i>Solis</i> <i>longitudo</i>	<i>Declinatio</i> δ	<i>Differentia ascen-</i> <i>sionalis</i> $\frac{h-h'}{2}$	<i>Diff. Ascens.</i> <i>in partibus radii</i>
0	0	0	0
15°	$5^\circ : 55'$	$4^\circ : 13'$	0,073594
30°	$11^\circ : 31'$	$8^\circ : 18'$	0,144861
45°	$16^\circ : 23'$	$12^\circ : 2'$	0,210020
60°	$20^\circ : 12'$	$15^\circ : 7'$	0,263835
75°	$22^\circ : 39'$	$17^\circ : 14'$	0,300777
90°	$23^\circ : 30'$	$17^\circ : 58'$	0,313576

Ex hisce porro inveniuntur producta $\cos. \delta \cos. \frac{h-h'}{2}$,

& $\frac{h-h'}{2} \sin. \delta$, uti sequens Tabella demonstrat

<i>Solis longitudo</i>	<i>Productum</i> $\cos. \delta \cos. \frac{h-h'}{2}$	<i>Productum</i> $\frac{h-h'}{2} \sin. \delta$
0	1,00000	0
15°	0,99208	0,00757

<i>Solis longitudo</i>	<i>Productum</i>	<i>Productum</i>
	$\cos. \delta \cos. \frac{h-h'}{2}$	$\frac{h-h'}{2} \sin. \delta$
30°	0, 96960	0, 02892
45°	0, 93831	0, 05924
60°	0, 90602	0, 09110
75°	0, 88144	0, 11583
90°	0, 87234	0, 12509

Hinc usurpata, ut prius, Cotesiana formula, sumptis-
que numeris secundae, & tertiae columnae pro ordi-
natis binarum Curvarum generis parabolici assequimur

<i>Pro Curva prima</i>	<i>Pro Curva altera</i>
$A = 1, 87234$	$A = 0, 12509$
$B = 1, 87352$	$B = 0, 12340$
$C = 1, 87562$	$C = 0, 12002$
$D = 0, 93831$	$D = 0, 05924$
$R = 91$	$R = 91$

$$4. \text{ Area} \times \cos. \lambda = 240, 13 \quad | \quad 4. \text{ Area} \times \sin. \lambda = 15, 719$$

$$\text{Quamobrem } 4. \text{ Area} \times \cos. \lambda + 4. \text{ Area} \times \sin. \lambda = 255, 85,$$

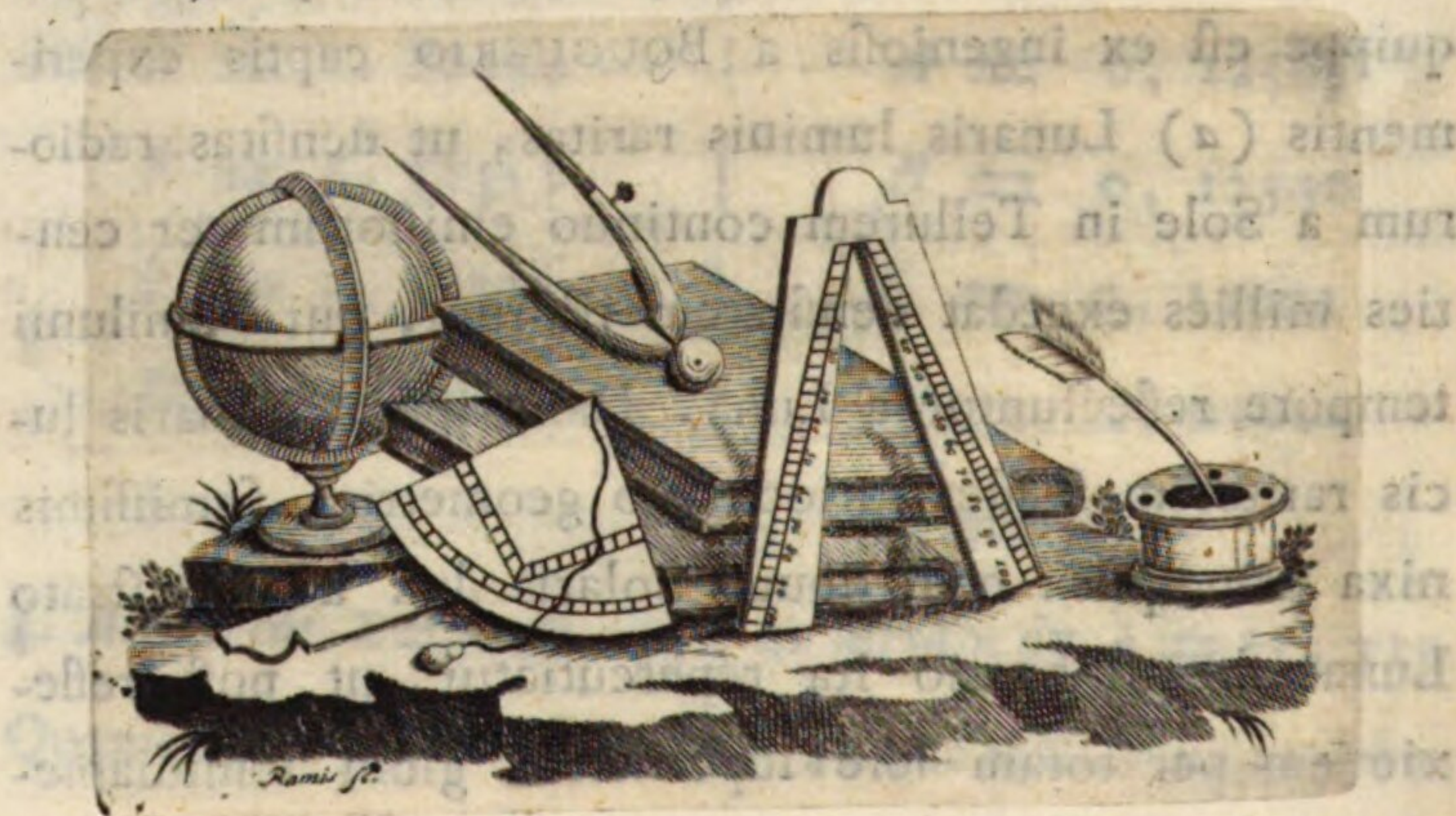
hujusque duplum 511,70 suppeditat quaesitam Caloris annui Solaris mensuram sub elevatione Poli $45^{\circ} : 11'$, qualem PAPIÆ agnovimus. Erit igitur

Calor Solaris Annuus	
Æquatorius	7078
Papiensis	5117
Londinensis, vel Gottingensis	4650
Polaris	2695

23. Hactenus tacite posuimus, Calorem Solis ab ejus radiis in Tellurem irruentibus unice pendere, esseque Caloris ipsius intensiorem numero radiorum ubique proportionalem: neque hanc assumptionem infirmat Lunaris lux, quae Plenilunii tempore in foco maximorum speculorum collecta ne minimum quidem caloris excitat sensum, summeque dilatabili thermometri exquisitissimi liquori expandendo impar est. Ea quippe est ex ingeniosis a BOUGUERIO captis experimentis (a) Lunaris luminis raritas, ut densitas radiorum a Sole in Tellurem continuo emissorum ter centies millies excedat densitatem illorum, qui Plenilunii tempore reflectuntur a Luna. Hanc ipsam Lunaris lucis raritatem suadet ratiocinatio geometrica firmissimis nixa principiis: nam quum Solaris lux a collustrato Lunae hemisphaerio ita repercutiatur, ut post reflectionem per totam fere superficiem globi semidiame-

(a) Opt. Lib. I. Sect. II. Art. XI.

trum habentis distantiae Lunae a Tellure aequalem diffundatur, sitque adeo ea superficies ad superficiem globi Lunaris ut 46249 ad 1 (accepta nimirum semidiametro Lunae apparenti 16', quae ad semidiametrum ejus veram se habet ut 465 ad 100000); erit iccirco media luminis densitas a Sole ad Lunam, vel etiam ad Terram directe propagati tot vicibus major densitate luminis a Luna in Terram repercussi (si vel totum, quod esse nequit, id lumen reflecteretur), quot vicibus excedit amplissima illa ingentis sphaerae superficies aream circuli Lunaris maximi, seu quartam Lunaris superficiei partem, quae pars mensuram luminis ante reflexionem repraesentat, nimirum 184996 vicibus. Quapropter minime erit mirandum, quod tanta Lunaris lucis attenuatio & raritas cum nullo sit calore conjuncta.



DISQUISITIO III.

DE SANGUINIS RESTITUTIONE HUIUS- QUE PROBLEMATIS AFFINITATE, ET ANALOGIA CUM PROBLEMA AN- TICIPATIONIS, SEU PECUNIAE IN ANTECESSUM NUMERATAE.

I. Illustris Jatromathematicus Jacobus KEILLIUS in *Tentaminibus Medico-Physicis*, Tentamine I. *De Sanguinis quantitate* determinaturus sanguinis redintegrationem, quae ex quotidiano victu continentem partium interitum reparante proficiscitur, calculum inaedificat fundamento undique labanti & ruinoso: comparat scilicet Problema hoc cum altero Algebrae Scriptoris usitato, quo quaeritur vini quantitas post aliquem dierum numerum in dolio superstes, si certa vini mensura quotidie exhauriatur ac tantundem aquae semper infundatur. *Sit itaque victus*, inquit citato loco KEILLIUS, *quem ad sustinendas vires, & ad quotidianos partium interitus compensandos recipimus, librarum quatuor. Hic*

cibus cum sanguine commixtus, & quasi in unum concoctus, cum eo simul in glandulis secernetur: ita ut novus, vetusque uno eodemque tempore amendantur: & primo secernantur in ratione quantitatis proportionali: Quaeritur jam, quantum veteris sanguinis, post datum temporis spatium in corpore relinquetur. Haec quaestio eadem est, ac si vas aliquod 200. congiis vini repletum esse ponamus, & inde quatuor quotidie exhaustos, totidemque aquae infusos, ut vas plenum semper relinquatur. Quaeritur jam quantum vini post aliquem dierum numerum in vase remanebit. Hoc porro instabili ac lubrico nixus principio KEILLIUS calculum ponit a veritate longe aberrantem, sed eleganti quadam veri specie, & quasi fuco minus attentis & sagacibus imponentem. Itaque quum de quaestione agatur inter Physiologiae Scriptores celeberrima ac nobilissima, de sanguinis nempe reparatione ac mutatione, operae praetium judicarem ex integro aggredi, & Keilliano convulso eversoque fundamento novum ponere calculum minus quidem, quam Keillianus, facilem & expeditum, sed nec minus elegantem, & veritati rerumque naturae magis conformem.

2. Jam in primis penes Physiologorum commendatissimos in confesso est, animalis corporis sanguinem intra diei spatium insensibili perspiratione avolantem, singulis momentis de corpore dece-

dere, singulisque momentis sanguinem novum ex alimentis elaboratum accedere veteri, & jacturas momentaneas reparare. Absurda igitur est comparatio ex vase vinario petita, ex quo non jugiter & continenter, sed simul & semel in die certa vini quantitas exhauritur, & aquae infunditur: ut aequa esset & numeris omnibus perfecta comparatio necesse foret dolium imaginari, ex cujus ostiolo seu foramine vinum continenter efflueret, & per foramen alterum aequale aqua perennis eodem impetu simul influeret. Tunc vero postulare quantum vini post datum temporis intervallum in dolio futurum sit, & contra quanto tempore vinum ad datam mensuram decrescet, idem prorsus est, si caetera paria accipiantur, ac petere quantum veteris sanguinis post aliquem dierum numerum in humano corpore reliquum sit, vel contra quot diebus Sanguis vetus ad datam usque particulam redigetur.

3. In hoc itaque solvendo Problemate calculus informandus erit in hunc modum:

Sit animalis Sanguinis quantitas = a

Pars ejus infinitesima singulis momentis avolans = p

Numerus momentorum in die naturali = n

Quantitas *mixti* Sanguinis intra diem decedens = b = np

Ergo Sanguis vetus in fine primi momenti = $a - p$

Evidens est, subsequenter calculum eodem modo

rite procedere, etiamſi reparatio Sanguinis non toto diei tempore, ſed paucis intra diem horis abſolvatur, eo ſcilicet intervallo quo Chyloſis, & Haematofis perficitur; ſiquidem in hac hypoteſi Haematofis diurnae tempus dividitur in momentorum numerum n , omniaque fiunt quemadmodum in prima hypotheſi. Caeterum de hac continenti ac perpetua Sanguinis jaſtura, & reparatione perbelle differit Facultatis Medicae Pariſienſis Socius ROBERTUS in recentiſſimo Opusculo *De Senectute*. *La nature* (inquit ille) *y pompe* (ſcilicet in Athmoſphaera) *& en attire l'eſpece d'humidité, dont elle a beſoin pour renouveler cette fumée aqueuſe qui s'évapore de toute la ſurface du corps par forme de tranſpiration. Cette action de pomper, & d'attirer l'humidité, eſt une faculté de la peau, qu'on ne peut pas révoquer en doute; l'exemple des Bouchers, des Chaircuitiers, des Cuiſiniers, donne toutes les preuves que l'on pourroit deſirer à cet égard. Ils ont la plupart, ainſi que leurs femmes, la peau blanche, le teint frais & fleuri, & en général, beaucoup d'embonpoint; en un mot ils ſe nourrissent par la peau. Mais ſi la nature pompe dans l'athmoſphère un ſuc alimentaire, l'on peut bien croire auſſi qu'elle y puise l'eau dont elle a beſoin pour ſ'humecter & ſe rafraichir.*

Quum autem ſecundo momento iterum decedat

pars minima p Sanguinis mixti ex vetere $a - p$, & ex novo adveniente, ac prioris jacturam reparante; ut inveniatur Sanguis vetus residuus in fine secundi momenti, fiat $a : p :: a - p : \frac{p(a-p)}{a}$, eritque $\frac{p(a-p)}{a}$

pars veteris Sanguinis in fine secundi momenti amissa.

Quare Sanguis vetus in fine secundi momenti residuus invenitur $= a - p - \frac{p(a-p)}{a} = \frac{(a-p)^2}{a}$.

Rurfus detegitur sanguis vetus in fine tertii momenti superstes, si ex analogia $a : p :: \frac{(a-p)^2}{a} : \frac{p(a-p)^2}{a^2}$

eliciatur pars $\frac{p(a-p)^2}{a^2}$ veteris sanguinis in fine tertii momenti decedens, eaque dematur a Sanguine veteri $\frac{(a-p)^2}{a}$, unde oritur $\frac{(a-p)^2}{a} - \frac{p(a-p)^2}{a^2} = \frac{(a-p)^3}{a^2}$. Sicque porro Sanguis vetus in fine quar-

ti momenti reperitur $\frac{(a-p)^4}{a^3}$; ac denique Sanguis ve-

rus in fine momenti n^{mi} , seu integrae diei superstes

prodibit $= \frac{(a-p)^n}{a^{n-1}} = a - np + \frac{n(n-1)}{2a} p^2$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3 a^2} p^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4 a^3} p^4 \\ - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 a^4} p^5 + \&c. \text{ Quum au-}$$

tem in hujusmodi expressione coefficientium factores $n(n-1)(n-2)(n-3) - - -$ abeant in $nnnn \dots$, quandoquidem prae valore ipsius n infinito evanescunt numeri 1, 2, 3, &c.; propterea Sanguis vetus in fine unius diei superstes repraesentatur per formulam

$$a - np + \frac{n^2 p^2}{2a} - \frac{n^3 p^3}{2 \cdot 3 a^2} + \frac{n^4 p^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 a^3} - \frac{n^5 p^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 a^4} \\ + \&c. = a - b + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^3}{2 \cdot 3 a^2} + \frac{b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 a^3} \\ - \frac{b^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 a^4} + \&c. \text{ Atque hinc liquet, quam parum}$$

veritati consonum sit illud Keillianae hypothesis confectarium, quo sanguis vetus in fine primae diei residuus ponitur $= a - b$. Ut modo inveniatur, quot diebus perficiatur sanguinis instauratio, ita ut nimirum sanguis vetus in corpore residuus quantitatem valde parvam ω adaequet, voco x numerum dierum

quaesitum, ac protinus nanciscor $\frac{(a-p)^{nx}}{a^{nx-1}} = \omega$, seu

$$\left(\frac{a-p}{a} \right)^{nx} = \frac{\omega}{a}; \text{ hinc habeo } x \log. \left(\frac{a-p}{a} \right)^n$$

$$= \log. \omega - \log. a, \text{ five } x \log. \left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^3}{6a^3} + \frac{b^4}{24a^4} - \frac{b^5}{120a^5} + \&c. \right) = \log. \omega - \log. a; \&c.$$

$$\text{consequenter } x = \frac{\log. \omega - \log. a}{\log. \left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^3}{6a^3} + \frac{b^4}{24a^4} - \&c. \right)}$$

Sit igitur juxta assumpta Keilliana $a = 20 \text{ libr.}$, $b = 4 \text{ libr.}$, $\omega = 0,0247 \text{ libr.}$, eritque $\log. \omega - \log. a = -1,6073030$
 $-1,3010300 = -2,9083330$, & $\log. \left(1 - \frac{b}{a} + \&c. \right)$

$$= \log. \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{50} - \frac{1}{750} + \frac{1}{15000} \right) \text{ fatis proxime, seu}$$

$$= \log. \frac{12281}{15000} = -0,0868576. \text{ Quamobrem reperitur}$$

$$x = \frac{-2,9083330}{-0,0868576} = \frac{29083330}{868576} = 33\frac{1}{2} \text{ diebus cir-}$$

citer, seu tribus diebus cum dimidio plus quam a KEILLIO proponitur. Idem invenitur brevius hoc pacto: Constat, logarithmum hyperbolicum quantitatis

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^3}{6a^3} + \frac{b^4}{24a^4} - \&c. \text{ esse } -\frac{b}{a}, \& \text{ lo-}$$

garithmum Tabularem, seu Briggianum aequari hyperbolico diviso per 2,302585; hinc prodibit

$$\log. \left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} - \&c. \right) = - \frac{b}{2,302585a}$$

$$= - \frac{1}{11,512925} = -0,08685; \text{ atque ideo } x = 33\frac{1}{2}$$

diebus .

4. Ponatur præterea cum KEILLIO totum corpus libras 160 ponderare, & quaeratur quantum veteris corporis exacto demum anno relinquatur, si quotidianus partium fluidarum solidarumque interitus quatuor librarum assumatur. Ex superiori formula deducitur il-

$$\text{lico } \log. \omega = x \log. \left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} - \&c. \right) + \log. a,$$

& capto $x = 365$ diebus, $a = 160$ libr., $b = 4$ libr. ori-

$$\text{tur } \log. \omega = - \frac{365b}{2,302585a} + 2,20412 = -3,9629373$$

$$+ 2,20412 = -1,7588173; \text{ proindeque } \omega = 0,01742$$

libr; quod iterum differt a Keilliano .

S C H O L I O N I.

5.  Ira prorsus est hujus Problematis cognatio & affinitas cum Problemate *anticipationis*, seu pecuniae in antecessum numeratae: quaeritur ibi quantum datae summae vel fortis a post annum elapsum relinquatur, si assumpto annuo ipsius foenore b detrahatur a

forte singulis momentis pars foenoris proportionalis ;
 seu quod idem est , quantum Creditori debeatur , si
 numerata in antecessum pecunia ipse consentiat in com-
 pensationem singulis momentis faciendam partis pro-
 portionalis annuae usurae . Enimvero dispartito an-
 no in infinitum momentorum numerum n , palam est ,
 fore $\frac{b}{n}$ foenus primo momento respondens , & $a - \frac{b}{n}$ esse
 sortem elapso primo momento residuam . Porro si fors
 a primo momento foenus dat $\frac{b}{n}$, fors $a - \frac{b}{n}$ secundo mo-

mento foenus praebebit $\frac{\left(a - \frac{b}{n}\right) \frac{b}{n}}{a}$, quod a forte

$a - \frac{b}{n}$ subtractum relinquit $a - \frac{b}{n} - \frac{\left(a - \frac{b}{n}\right) \frac{b}{n}}{a}$
 $= \frac{\left(a - \frac{b}{n}\right)^2}{a}$ forti elapso secundo momento residuae .

Instituta rursus analogia $a : \frac{b}{n} :: \frac{\left(a - \frac{b}{n}\right)^2}{a} : \frac{\left(a - \frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n}}{a^2}$,

quartus proportionalis $\frac{\left(a - \frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n}}{a^2}$ usuram exprimit

tertio momento caducam, & $\frac{\left(a - \frac{b}{n}\right)^2}{a} - \frac{\left(a - \frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n}}{a^2}$

$$= \frac{\left(a - \frac{b}{n}\right)^3}{a^2} \text{ fortem repraesentat exacto tertio mo-}$$

mento superstitem : sicque porro exacto momento
n: ^{esimo} seu anno integro invenietur fors reliqua

$$= \frac{\left(a - \frac{b}{n}\right)^n}{a^{n-1}} . \text{ Evoluta hac quantitate invenitur}$$

$$a - b + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^3}{6a^2} + \frac{b^4}{24a^3} - \frac{b^5}{120a^4} + \&c. \text{ habita}$$

scilicet ratione valoris infiniti n , prae quo in factore
quolibet $n - 1, n - 2, n - 3, \&c.$ evanescunt nume-
ri $-1, -2, -3, \&c.$ Est autem haec formula pla-
ne eadem, quam supra pro sanguinis renovatione de-
teximus, & formulae valor nihil aliud est nisi factum
ex quantitate a in numerum, cujus logarithmus hy-
perbolicus est $-\frac{b}{a}$.

6. Haud dissimili ratiocinatione ostendi potest de-
cantatum Problema, a Jac. BERNOULLIO in Actis Lipsien-
sibus propositum, & suppressa demonstratione solutum.
Problema Bernoullianis verbis expressum tale est :

Quaeritur si Creditor aliquis pecuniam fœnori exponat ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usurae annuae sorti annumeretur, quantum ipsi finito anno debeatur. Ait Bernoullius pecuniam elapso anno Creditori debitam aequari factæ ex data sorte in numerum, cujus logarithmus hyperbolicus est ratio fœnoris ad sortem.

7. Ad hoc demonstrandum dicatur a fors, b annua usura, n numerus momentorum infinitus in anno:

erit $\frac{b}{n}$ usura primi momenti, & $a + \frac{b}{n}$ fors in fine il-

lius momenti. Dic jam, si fors a momento primo fœnus parit $\frac{b}{n}$, fors $a + \frac{b}{n}$ gignet momento secundo usu-

ram $\frac{\left(a + \frac{b}{n}\right) \frac{b}{n}}{a}$, quæ præcedenti sorti $a + \frac{b}{n}$ annu-

merata sortem dat in fine secundi momenti $\frac{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2}{a}$.

Tertio momento, propter analogiam $a : \frac{b}{n} :: \frac{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2}{a} :$

$\frac{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n}}{a^2}$, habetur fœnus respondens $\frac{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n}}{a^2}$,

quod rursus forti praecedenti adjunctum eandem reddit

$$= \frac{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2}{a^2} . \text{Atque ita invenitur fors in fine quarti mo-}$$

$$\text{menti} = \frac{\left(a + \frac{b}{n}\right)^4}{a^4} , \text{ ac tandem momento } n^{\text{esimo}}$$

$$\text{feu anni fine} \frac{\left(a + \frac{b}{n}\right)^n}{a^{n-1}} , \text{ nimirum } a + b + \frac{b^2}{2a}$$

$$+ \frac{b^3}{2 \cdot 3 a^2} + \frac{b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 a^3} + \frac{b^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 a^4} + \frac{b^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 a^5} + \&c.,$$

$$\text{five } a \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} + \frac{b^3}{2 \cdot 3 a^3} + \frac{b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 a^4} + \&c. \right) .$$

Jam vero ex hyperbolae quadratura perspectum est ,

$$\text{quantitatem } 1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{2a^2} + \frac{b^3}{2 \cdot 3 a^3} + \&c. \text{ nihil aliud}$$

esse nisi numerum, cujus logarithmus hyperbolicus est

$$\frac{b}{a} . \text{ Igitur pecunia finito anno Creditori debita aequa-}$$

tur facto ex pristina forte a in numerum, cujus hyperbolicus logarithmus est ratio foenoris ad fortem .

S C H O L I O N II.

8. **I**N Bernoulliano Problemate fumitur $\frac{b}{n}$ pro primi momenti foenore, propterea quod ex Problematis praescripto *pars* tempori *proportionalis* *usurae annuae* accipienda est: at si in Problematibus ad compositum foenus, seu anatocismum spectantibus capienda esset momentanea fortis usura primo instanti respondens, ea

inveniretur $= \frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}} - a$; notum quippe est, in

Problematibus hujusmodi sortem post datum quodlibet

tempus t auctam exprimi semper per formulam $\frac{(a+b)^t}{a^{t-1}}$,

ac proinde sortem, primo elapso momento $\frac{1}{n}$, evasuram

$\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}}$, ideoque instantaneam primi momenti usu-

ram fore $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}} - a$. Explicata in seriem quantitate

$$\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}} \text{ oritur infinitinomialium } a + \frac{1}{n}b + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{b^2}{2a} \\ + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\frac{b^3}{2.3a^2} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right) \\ \left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)\frac{b^4}{2.3.4a^3} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right) \\ \left(\frac{1}{n}-2\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)\left(\frac{1}{n}-4\right)\frac{b^5}{2.3.4.5a^4} + \&c.$$

Porro in hoc infinitinomio factores $\frac{1}{n}-1$, $\frac{1}{n}-2$, $\frac{1}{n}-3$, &c. ob evanescentem ipsius $\frac{1}{n}$ valorem, degenerant in -1 , -2 , -3 , &c. Igitur infinitinomialium abit in $a + \frac{b}{n} - \frac{b^2}{2na} + \frac{b^3}{3na^2} - \frac{b^4}{4na^3} + \frac{b^5}{5na^4} - \&c.$
 $= a + \frac{1}{n} \left(b - \frac{b^2}{2a} + \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^4}{4a^3} + \frac{b^5}{5a^4} - \&c. \right).$

Hinc consequens est, instantaneum foenus $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}} - a$ nancisci formam $\frac{1}{n} \left(b - \frac{b^2}{2a} + \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^4}{4a^3} + \frac{b^5}{5a^4} - \frac{b^6}{6a^5} + \&c. \right)$, five etiam $\frac{1}{n}a \left(\frac{b}{a} - \frac{b^2}{2a^2} \right.$

$+ \frac{b^3}{3a^3} - \frac{b^4}{4a^4} + \frac{b^5}{5a^5} - \&c.)$ Est autem ex logarithmorum doctrina exploratum, quantitatem $\frac{b}{a} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{b^3}{3a^3} - \frac{b^4}{4a^4} + \&c.$ esse logarithmum hyperbolicum numeri $1 + \frac{b}{a}$.

Igitur accepto hic symbolo $\log.$ ad logarithmum non Briggianum, sed hyperbolicum designandum reperitur

usura primo instanti respondens $= \frac{1}{n} a \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right),$

vel $= a dt \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right),$ si loco $\frac{1}{n}$ substituatur temporis t differentiale.

9. Si quis integrata expressione differentiali $a dt \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right),$ inventoque integrali $at \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right),$

contenderet, integrale istud aequari usurae, quae respondet tempori indeterminato t , in fallaciam impingeret quo magis subtilem & latentem, eo follertius cavendam. Et sane integrale quantitatis $a dt \log.$

$\left(1 + \frac{b}{a} \right)$ nihil aliud potest exprimere nisi summam

omnium $a dt \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right)$ in hypothesi, quod singu-

lis momentis foenus instantaneum sit semper idem, nem-

pe $a dt \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right)$, vel huic aequale $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}-1} - a$;

in qua certe hypothefi ufura tempore indeterminato

t parta evadit $at \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right)$, & pofito

$t = 1$ anno, fit illa $= a \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right)$, quod

etiam invenitur ducto foenore instantaneo constanti

$\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}-1} - a$ in momentorum numerum n in anno

contentorum, unde habetur $\frac{n(a+b)^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}-1} - na$, hoc

est $na \left(1 + \frac{b}{na} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{b^2}{2a^2} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) \frac{b^3}{2.3a^3} \right.$
 $\left. + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) \left(\frac{1}{n} - 3 \right) \frac{b^4}{2.3.4a^4} + \&c. \right) - na$,

feu denique $a \left(\frac{b}{a} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{b^3}{3a^3} - \frac{b^4}{4a^4} + \frac{b^5}{5a^5} - \&c. \right)$,

nimirum $a \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right)$. Verum hypothefis, quod

instantaneum foenus in quaestionibus ad anatocifmum

fpectantibus constans & immutabile fit fingulis qui-

busque

busque momentis, falsa est & absurda; quandoquidem singulis momentis foenus instantaneum variat, ac primo dumtaxat instante formam accipit *adt log.*

$\left(1 + \frac{b}{a}\right)$, caeteris autem omnibus aliam semper atque

aliam. Propterea quantitas *adt log.* $\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ haud-

quaquam spectari potest veluti elementum foenoris una cum tempore t fluentis, neque proinde ejus integrale haberi potest pro foenore, quod indeterminato tempore t producat.

10. Verum ac proprie dictum usurae una cum tempore t fluentis elementum invenitur hoc pacto:

Exploratum est, sortem a tempore t evadere $a\left(1 + \frac{b}{a}\right)^t$,

& tempore $t + dt$, seu momento subsequenti fieri $a\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{t+dt}$; igitur differentia inter sortes duas

infinite propinquas, nimirum $a\left(1 + \frac{b}{a}\right)^{t+dt}$

— $a\left(1 + \frac{b}{a}\right)^t$ repraesentabit instantaneum foenus par-

tum tempusculo infinitesimo dt post tempus quodvis indeterminatum t , quod equidem constituit verum ac proprie dictum foenoris elementum. Idemque reperi-

tur ope hujus analogiae, quemadmodum se habet fors
 a ad foenus suum instantaneum momenti primi

$a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^{dt} - a$, ita se habet fors $a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t$ post
 tempus indeterminatum t ad foenus suum instantaneum
 $a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^{t+dt} - a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t$.

II. Nunc autem suscepta integratione elementi

$a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^{t+dt} - a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t$ invenietur accurate foenus

nus tempore quolibet indeterminato t productum. Ete-

nim quantitas $a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^{t+dt} - a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t$, seu

$a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t \left(1 + \frac{b}{a} \right)^{dt} - a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t$, explicato

binomio $\left(1 + \frac{b}{a} \right)^{dt}$, deprehenditur $= a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t$

$\left(1 + \frac{bdt}{a} + dt(dt-1) \frac{b^2}{2a^2} + dt(dt-1)(dt-2) \frac{b^3}{2.3a^3} \right.$

$\left. + dt(dt-1)(dt-2)(dt-3) \frac{b^4}{2.3.4a^4} + \&c. \right)$

$- a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t$. Porro in hac expressione factores

$dt-1$, $dt-2$, $dt-3$, &c. evanescente dt mutantur in -1 , -2 , -3 , &c. & proinde ipsa expres-

sio degenerat in $a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t \left(1 + \frac{bdt}{a} - \frac{b^2 dt}{2a^2} + \frac{b^3 dt}{3a^3} - \frac{b^4 dt}{4a^4} + \frac{b^5 dt}{5a^5} - \&c. \right) - a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t$, hoc est in $a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t dt \left(\frac{b}{a} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{b^3}{3a^3} - \frac{b^4}{4a^4} + \frac{b^5}{5a^5} - \frac{b^6}{6a^6} + \&c. \right)$, seu tandem in $a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t dt \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right)$. Constat autem ex quantitatum exponentialium integratione, esse

$\int a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t dt \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right) = a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t + \text{const.}$, & quum foenus temporis initio, seu evanescente t nullum sit, fiet $\text{const.} = -a$; proindeque integrale completum $= a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t - a$, quod usuram praebet tempori cuilibet indeterminato respondentem, & (posito $t = 1$ anno) usuram dat b , quemadmodum oportet.

12. Caeterum quod perspicue demonstrat, a formula $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}} - a$ rite repraesentari instantaneum

foenus primo momento caducum, est sequens ratioci-

natio, cujus ope ab ipso primi momenti foenore ascen-
dere licet gradatim usque ad foenus annum b . Sane,

si fors a primo momento gignit usuram $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}} - a$,

fors $a + \frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}} - a$, seu $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}}$ pariet secun-

do momento usuram $\frac{(a+b)^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}-1}} - \frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}}$, qua

addita usurae primi momenti oritur $\frac{(a+b)^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}-1}} - a$ pro

usura duobus primis momentis producta. Rursus si fors

a momento primo gignit foenus $\frac{(a+b)^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}-1}} - a$, fors

$\frac{(a+b)^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}-1}}$ gignet momento tertio usuram $\frac{(a+b)^{\frac{3}{n}}}{a^{\frac{3}{n}-1}} - \frac{(a+b)^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}-1}}$

$- \frac{(a+b)^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}-1}}$; hacque addita usurae duorum praece-

dentium momentorum prodit usura trium priorum mo-

mentorum $\frac{(a+b)^{\frac{3}{n}}}{\frac{3}{n}-1} - a$. Atque ita invenitur quatuor

priorum momentorum usura $= \frac{(a+b)^{\frac{4}{n}}}{\frac{4}{n}-1} - a$; ac de-

nique momentorum omnium n annum integrum constituen-

tium usura $= \frac{(a+b)^{\frac{n}{n}}}{\frac{n}{n}-1} - a = a+b-a = b$, qua-

lem esse oportet.

13. Neque aliter ex formula altera aequipollenti

$\frac{1}{n} a \log. \left(1 + \frac{b}{a}\right)$ rite tractata reperitur. Et revera si

a forte a provenit primo instanti usura $\frac{1}{n} a \log. \left(1 + \frac{b}{a}\right)$,

a forte $a + \frac{1}{n} a \log. \left(1 + \frac{b}{a}\right)$ proveniet secundo instan-

ti foenus $\frac{1}{n} a \log. \left(1 + \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{n^2} a \left(\log. \left(1 + \frac{b}{a}\right)\right)^2$,

quod si addatur foenori primi instantis, oritur foe-

nus duorum instantium primorum $\frac{2}{n} a \log. \left(1 + \frac{b}{a}\right)$

$+ \frac{1}{n^2} a \left(\log. \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right)^2 = a \left(1 + \frac{1}{n} \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right)^2$
 $- a$. Rursus si fors a progignit primo instanti usu-
ram $\frac{1}{n} a \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right)$, fors $a \left(1 + \frac{1}{n} \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right)^2$
duobus primis instantibus cumulata generat tertio instan-
ti usuram $a \left(1 + \frac{1}{n} \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right)^2 \times \frac{1}{n} \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right)$.
Hac collecta in unam summam cum usura duorum in-
stantium praecedentium, prodit usura trium priorum
instantium $= a \left(1 + \frac{1}{n} \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right)^3 - a$. Eodem-
que modo invenitur usura quatuor priorum instan-
tium $= a \left(1 + \frac{1}{n} \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right)^4 - a$, ac demum
usura instantibus omnibus n progenita
 $= a \left(1 + \frac{1}{n} \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right)^n - a$. Explicata porro in
seriem potestate $\left(1 + \frac{1}{n} \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right)^n$, & in termi-
ni cujusvis coefficiente contemptis numeris prae
infinite n evanescentibus, oritur ipsa potestas
 $= 1 + \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(\log. \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right)^2$

$$+ \frac{1}{2.3} \left(\log. \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right)^3 + \frac{1}{2.3.4} \left(\log. \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right)^4 + \&c.,$$

quae expressio ex logarithmorum hyperbolicorum doctrina aequatur numero, cujus hyperbolicus logarithmus est ipse secundus seriei terminus $\log. \left(1 + \frac{b}{a} \right)$;

proindeque fit series ipsa $= 1 + \frac{b}{a}$. Quare usura primo

anno parta $a \left(1 + \frac{1}{n} \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right) \right)^n - a$ invenitur

$$= a \left(1 + \frac{b}{a} \right) - a = b, \text{ sicuti expectabatur.}$$

14. Haud inutile erit animadvertere, differentiale foenoris tempore quovis cumulati idem penitus esse ac differentiale fortis eidem tempori respondentis. Nam fors post datum quodlibet tempus t fit, uti palam

est, $a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t$, & post tempus proxime sequens

$t + dt$ ea evadit $a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^{t+dt}$: quamobrem ejus

differentiale erit differentia fortis ipsius in duobus statibus infinite proximis consideratae, hoc est fiet ejus

$$\text{differentiale} = a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^{t+dt} - a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t$$

$$= a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t dt \log. \left(1 + \frac{b}{a} \right), \text{ quemadmodum foc-}$$

noris. Neque id mirum videri debet, quum expressio fortis

$$a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t \text{ non discrepet ab expressione foenoris}$$

$$a \left(1 + \frac{b}{a} \right)^t - a \text{ nisi constanti quantitate } a, \text{ explo-}$$

ratumque alias sit binarum variabilium constanti
quantitate inter se differentium eandem esse fluxio-
nem, seu idem elementum aut differentiale.



DISQUISITIO IV.

DE INSIGNIBUS QUIBUSDAM MOTUS VERTICALIS PROPRIETATIBUS IN CORPORIBUS ASCENDENTIBUS ET LIBERE DESCENDENTIBUS.

I. **I**Nter Auctores quamplurimos, qui de Corporum Motibus magna ingenii dexteritate differuerunt, atque hanc utiliorem praestantiorumque Mechanicae partem scriptis editis illustrarunt, nemo, quod sciam, data opera inquisivit in singulares quasdam ac prope admirandas Motus Verticalis affectiones in illis corporibus, quae verticaliter sursum dato impetu projiciuntur libereque deorsum labuntur, in eaque vis centralis, seu gravitatis terrestris hypothese, quam non imaginatio sibi fingit, sed natura ipsa postulat, experimenta confirmant, Coelumque ipsum, si ita loqui fas est, Terra, ac NEWTONUS demonstrant. Hanc quidem Naturae hypothese de vi centrali quadratis distantiarum a centro reciproce proportionali excoluit in elegantissimo Opusculo *De Corporum Motu Rectilineo, & Curvilineo*

in Mediis non resistentibus §. 48. Coelestinus ROLLIUS ; praecipua rectilinei motus symptomata in hac assumptione virium evolvens ; sed admirabiliores affectiones silentio praeteriit , motumque dumtaxat corporum sponte descendentium investigavit , & analysi denique vix delibata longiorem molestioremque synthesis rationem persequi maluit . Constitui itaque singularia isthaec Verticalis Motus symptomata scrutari , eaque per breviorrem severioremque Analyseos viam diligenter evolvere atque explicare .

2. Projiciatur grave verticaliter sursum dato impetu vel celeritate c in hypothesis gravitatis terrestris decrefcentis in ratione duplicata inversa distantiarum a Terrae centro , in vera nimirum Naturae hypothesis , qualem terrestria coelestiaque phaenomena certo suadent & apprime demonstrant . Sit Terrae semidiameter r ; altitudo , ad quam grave pervenit tempore t , velocitate v , sit x , gravitas demum acceleratrix in terrestri superficie dicatur g . Jamvero , quoniam est ex hypothesis vis acceleratrix uti reciproce quadratum distantiae a Terrae centro , erit iccirco $(r+x)^2 : r^2 ::$

$g : \frac{gr^2}{(r+x)^2} =$ vi acceleratrici gravitatis in altitudine x supra Telluris superficiem . Notum porro est ex Mechanicis , vim ductam in tempusculum aequari extin-

cto elemento velocitatis; propterea fiet $\frac{gr^2 dt}{(r+x)^2} = -dv$.

Quocirca ob $dt = \frac{dx}{v}$, obtinebitur $\frac{gr^2 dx}{(r+x)^2} = -v dv$;

atque adeo $\int \frac{gr^2 dx}{(r+x)^2} = \int -v dv$, seu $\frac{gr^2}{r+x} = \frac{1}{2} v^2 + \text{Const.}$ Invenitur autem $\text{Const.} = gr - \frac{1}{2} c^2$ eo quod initio motus existente $x = 0$, evadit $v = c$.

Igitur nanciscimur $\frac{1}{2} v^2 = \frac{gr^2}{r+x} - gr + \frac{1}{2} c^2$, seu $v = \sqrt{\left(c^2 - \frac{2grx}{r+x} \right)}$.

3. Evidens jam est ex hac aequatione $v = \sqrt{\left(c^2 - \frac{2grx}{r+x} \right)}$, in corporibus sursum projectis aliquam semper superesse velocitatem residuam v post emensam altitudinem x quotiescumque fuerit $c^2 > \frac{2grx}{r+x}$ five $x < \frac{c^2 r}{2gr - c^2}$; ita ut si initialis velocitas c designet spatium motu aequabili describendum a corpore unius secundi tempore, & vis gravitatis acceleratrix g in superficie terrestri spatium designet, quod unius pariter secundi tempore corpus percurreret uniformi motu ex ipsius gravitatis g actione, spatium videlicet pe-

dum parisiensium 30,2, remanere debeat in corpore
ascendente velocitas aliqua v quoties habeatur c^2

$$> \frac{60,4rx}{r+x}, \text{ five } x < \frac{c^2 r}{60,4r+c^2}, \text{ hoc est (sumpta}$$

femidiametro terrestri r pedum parisiens. 19741200) c^2

$$> \frac{1192368480x}{19741200+x} \text{ vel } x > \frac{19741200 c^2}{1192368480-c^2}. \text{ Tota}$$

vero ascendentis corporis extinguetur velocitas impres-

$$\text{sa ubi fuerit } c^2 = \frac{2grx}{r+x} = \frac{1192368480x}{19741200+x}, \text{ vel } x$$

$$= \frac{c^2 r}{2gr-c^2} = \frac{19741200 c^2}{1192368480-c^2}.$$

4. Residua corporis sursum projecti celeritas
 v invenitur imaginaria aut absurda quotiescumque

$$c^2 > \frac{2grx}{r+x}, \text{ vel } x > \frac{c^2 r}{2gr-c^2}; \text{ quod sane indicat,}$$

altitudinem x acceptam fuisse justo majorem, ad quam
nimirum projectum non pertingit. Capta vero altitudi-

ne x infinita, reperitur residua velocitas v semper re-

pugnans quoties fuerit $c^2 < 2gr. < 1192368480$ ped.;

sed sumpta c^2 vel $=$, vel > 1192368480 ped., five

$c =$, aut $> 34530,69$ ped., velocitas residua v inve-

nitur realis, videlicet aut nulla aut positiva, infinita

licet existente altitudine, ad quam corpus debet eniti.

5. En igitur Theorema prorsus mirificum & sin-

gulare: Datur velocitas finita, eaque arctis limitibus circumscripta, & ipsa celeritate luminis immaniter minor, quacum si grave corpus sursum projiciatur, sublata mediū resistantia, veraque admissa gravitatis decrescentis hypothesi in ratione duplicata inversa distantiarum a Terrae centro, idem perveniret ad altitudinem infinitam, seu qualibet data & assignabili majorem. Haec autem velocitas talis est, ut corpus ab ipsa animatum pedes tantum 34531 singulis secundis aequabiliter conficeret. Sane in for-

mula $v = \sqrt{c^2 - \frac{2grx}{r+x}}$, fit $v = 0$ quando

$c = \sqrt{\frac{2grx}{r+x}}$, hoc est (facta $x = \infty$) quando

$c = \sqrt{2gr} = 34531$. Hinc proponi potest hoc elegantissimum Problema: *Invenire velocitatem projectionis, quae in gravi verticaliter ascendente non pereat nisi post emensum spatium infinitum in vera hypothesi gravitatis decrescentis &c.* Reperietur hujusmodi celeritas qualis modo definita fuit, nimirum nec immensa nec ultra modum ingens.

6. Sed proprietatem adeo insignem & inexpectatam juvat aliter demonstrare: Labatur grave corpus ab altitudine semidiametrorum terrestrium n facta computa-

tione ab ipso terrae centro; eritque $\frac{gr^2 dx}{(nr - x)^2}$

$$= udu, \text{ dicta } x \text{ altitudine descendendo percurfa, } u \text{ velocitate illo descensu acquisita. Quare } \int \frac{gr^2 dx}{(nr-x)^2} \\ = \int udu, \text{ seu } \frac{gr^2}{nr-x} = \frac{1}{2} u^2 + \text{Const.} = \frac{1}{2} u^2 + \frac{gr}{n}.$$

Igitur in fine lapsus, quando nempe corpus telluris superficiem attigit, ubi $x = (n-1)r$, evadit $u^2 = 2gr - \frac{2gr}{n}$. Sit modo $n = \infty$, cadat scilicet corpus ab in-

finita altitudine, seu semidiametris terrestribus numero infinitis aequali, & orietur $u^2 = 2gr$, sive $u = \sqrt{2gr} = 34531$ ped. Quapropter corpus ex infinita lapsum altitudine, & telluris superficiem jam attingens acquirit velocitatem dumtaxat finitam, videlicet velocitatem pedum tantummodo 34531 singulis secundis. Igitur e contrario corpus hac ipsa finita velocitate sursum emissum ad altitudinem pervenit infinitam.

7. Alia insignis motuum istiusmodi proprietas ita se habet: Si initialis velocitas c , corpori sursum projecto impressa, infinita fuerit, ea post emensam a corpore altitudinem infinitam non modo non extinguatur, vel convertitur in velocitatem finitam, sed adhuc perseverat infinita, nec ab ipsa initiali diversa. Id liquet ex superiori formula

$$v = \sqrt{c^2 - \frac{2grx}{r+x}}, \text{ quae assumptis } x, \text{ \& } c \text{ in-}$$

finitis mutatur in $\sqrt{(c^2 - 2gr)} = c - \frac{gr}{c} - \frac{g^2 r^2}{2c^3}$
 $- \frac{g^3 r^3}{2c^5} - \frac{5g^4 r^4}{8c^7} - \&c.$; quae quidem series non

differt a primo termino c in hac hypothese ipsius $c = \infty$.

8. Pergo modo, & quaero tempus t per functionem velocitatis v repraesentatum, in corporibus ascen-

dentibus. Ex formula $v = \sqrt{(c^2 - \frac{2grx}{r+x})}$ infero x

$$= \frac{c^2 r - r v^2}{2gr - c^2 + v^2}, \text{ \& facta differentiatione elicio } dx$$

$$= - \frac{4gr^2 v dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2}; \text{ atque inde } dt = \frac{dx}{v}$$

$$= - \frac{4gr^2 dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2}. \text{ Jamvero hujus quantitatis}$$

integrale ita exquiro: Pono $\int - \frac{4gr^2 dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2}$

$$= \frac{Av + B}{2gr - c^2 + v^2} - \int \frac{4gr^2 D dv}{2gr - c^2 + v^2}, \text{ ac fumo}$$

differentialia, habeoque $- \frac{4gr^2 dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2}$

$$= \frac{(2gr - c^2) Adv - Av^2 dv - 2B v dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2} - \frac{4gr^2 D dv}{2gr - c^2 + v^2}.$$

Hinc reductione terminorum facta ad eundem Denominatorem consequor hanc aequationem

$$\begin{array}{rcl}
 - & Av^2 & - 2Bv & + & 2grA \\
 - & 4gr^2 Dv^2 & & - & c^2 A \\
 & & & - & 8g^2 r^3 D = 0 \\
 & & & + & 4gr^2 c^2 D \\
 & & & + & 4gr^2
 \end{array}$$

Ex hac hac vero sequentes nanciscor aequalitates
 $A + 4gr^2 D = 0$, $2B = 0$, $2grA - c^2 A - 8g^2 r^3 D$
 $+ 4gr^2 c^2 D + 4gr^2 = 0$ Propterea fit A
 $= -\frac{2gr^2}{2gr - c^2}$, $B = 0$, $D = \frac{1}{4gr - 2c^2}$. Igitur

$$\begin{aligned}
 S - \frac{4gr^2 dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2} &= -\frac{2gr^2 v}{(2gr - c^2)(2gr - c^2 + v^2)} \\
 - S \frac{2gr^2 dv}{(2gr - c^2)(2gr - c^2 + v^2)} &\cdot \text{Liquet porro,}
 \end{aligned}$$

expressionem $S \frac{2gr^2 dv}{(2gr - c^2)(2gr - c^2 + v^2)}$ in hy-
 pothesi $2gr > c^2$ aequalem esse quantitati $\frac{2gr^2}{(2gr - c^2)^2}$
 ductae in arcum circuli, cujus radius est $\sqrt{2gr - c^2}$,
 tangens $= v$, vel etiam aequalem quantitati $\frac{2gr^2}{(2gr - c^2)^{\frac{3}{2}}}$
 multiplicatae per arcum circuli, cujus semidiameter est
 $= 1$, tangens $= \frac{v}{\sqrt{2gr - c^2}}$. Habebitur itaque

$$S - \frac{4gr^2 dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2} = - \frac{2gr^2 v}{(2gr - c^2)(2gr - c^2 + v^2)}$$

$$- \frac{2gr^2}{(2gr - c^2)^{\frac{3}{2}}} \times \text{Arc. tang.} \frac{v}{\sqrt{(2gr - c^2)}} + \text{Const.} = t.$$

Quum autem motus initio, seu assumpto $t = 0$ evadat $v = c$, invenitur Const.

$$= \frac{rc}{2gr - c^2} + \frac{2gr^2}{(2gr - c^2)^{\frac{3}{2}}} \times \text{Arc. tang.} \frac{c}{\sqrt{(2gr - c^2)}}.$$

Quare postremo nanciscimur $t = \frac{rc}{2gr - c^2} -$

$$\frac{2gr^2 v}{(2gr - c^2)(2gr - c^2 + v^2)} + \frac{2gr^2}{(2gr - c^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\text{Arc. tang.} \frac{c}{\sqrt{(2gr - c^2)}} - \text{Arc. tang.} \frac{v}{\sqrt{(2gr - c^2)}} \right);$$

& quoniam datis duobus arcibus ϕ , λ est tang.

$$(\phi - \lambda) = \frac{\text{tang. } \phi - \text{tang. } \lambda}{1 + \text{tang. } \phi \text{ tang. } \lambda}, \text{ erit denique } t$$

$$= \frac{rc}{2gr - c^2} - \frac{2gr^2 v}{(2gr - c^2)(2gr - c^2 + v^2)} + \frac{2gr^2}{(2gr - c^2)^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\text{Arc. tang.} \frac{(c - v) \sqrt{(2gr - c^2)}}{2gr - c^2 + cv}.$$

9. Si jam velocitas initialis c , ascendenti corpori communicata, fuerit $= \sqrt{2gr} = 24531$ ped. unius secundi tempore, facile ostendimus, velocitatem ipsam

non perire nisi post elapsum tempus infinitum. In hac enim

$$\text{hypothesi aequatio differentialis } dt = - \frac{4gr^2 dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2}$$

$$\text{mutatur in } - \frac{4gr^2 dv}{v^4}; \text{ atque hinc eruitur } t = \frac{4gr^2}{3v^3}$$

$$- \frac{4gr^2}{3c^3}. \text{ Proinde sumpto } v = 0 \text{ oritur } t = \infty.$$

Quapropter si corpori sursum projecto velocitas imprimitur finita, nec admodum ingens, pedum nempe 34531. singulis secundis, ea non extinguitur nisi post infinitum tempus, & corpus pergit semper ascendere contra gravitatis directionem, quin unquam ad quietem redigatur.

10. Fingamus nunc, velocitatem initialem c majorem quam $\sqrt{2gr}$; inveniemus, expressionem temporis t §. 8. imaginariam esse; quod quidem nos docet,

$$\text{formulae } \int - \frac{4gr^2 dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2} \text{ integrale}$$

aliunde quam a circuli rectificatione pendere: & revera exploratum alias est, differentialem formulam

$$- \frac{4gr^2 dv}{(2gr - c^2 + v^2)^2} \text{ in hypothese } c^2 > 2gr \text{ per}$$

hyperbolae quadraturam integrari. Itaque fiat $c^2 - 2gr$

$$= h^2, \text{ eritque } dt = - \frac{4gr^2 dv}{(v^2 - h^2)^2} = - \frac{4gr^2 dv}{(v+h)^2(v-h)^2}.$$

Capio igitur $-\frac{4gr^2 dv}{(v^2 - h^2)^2} = \frac{Av dv + B dv}{(v + h)^2} + \frac{Cv dv + D dv}{(v - h)^2}$; terminos redigo ad eundem denominatorem, & aequationem nanciscor

$$\begin{aligned} &Av^3 - 2hAv^2 + h^2Av + h^2B \\ &+ Cv^3 + Bv^2 - 2hBv + h^2D = 0. \\ &+ 2hCv^2 + h^2Cv + 4gr^2 \\ &+ Dv^2 + 2hDv \end{aligned}$$

Ex hac vero sequentes deducuntur aequalitates

$$\begin{aligned} A + C &\dots\dots\dots = 0; \\ -2hA + B + 2hC + D &= 0; \\ h^2A - 2hB + h^2C + 2hD &= 0; \\ h^2B + h^2D + 4gr^2 &\dots\dots = 0; \end{aligned}$$

atque inde infertur

$$\begin{aligned} A &\dots\dots\dots = -\frac{gr^2}{h^3}; \\ B &\dots\dots\dots = -\frac{2gr^2}{h^2}; \\ C &\dots\dots\dots = \frac{gr^2}{h^3}; \\ D &\dots\dots\dots = -\frac{2gr^2}{h^2}. \end{aligned}$$

Quamobrem
$$-\frac{4gr^2 dv}{(v^2 - h^2)^2} = -\frac{gr^2 v dv}{h^3 (v+h)^2}$$

$$+\frac{gr^2 v dv}{h^3 (v-h)^2} - \frac{2gr^2 dv}{h^2 (v+h)^2} - \frac{2gr^2 dv}{h^2 (v-h)^2}.$$

Nunc autem protinus invenitur

$$S - \frac{gr^2 v dv}{h^3 (v+h)^2} = -\frac{gr^2}{h^2 (v+h)} - \frac{gr^2}{h^3} \times$$

$$\log.(v+h); S \frac{gr^2 v dv}{h^3 (v-h)^2} = -\frac{gr^2}{h^2 (v-h)} + \frac{gr^2}{h^3} \times$$

$$\log.(v-h); S - \frac{2gr^2 dv}{h^2 (v+h)^2} = \frac{2gr^2}{h^2 (v+h)}$$

$$S - \frac{2gr^2 dv}{h^2 (v-h)^2} = \frac{2gr^2}{h^2 (v-h)}. \text{ Igitur } \tau$$

$$= S - \frac{4gr^2 dv}{(v^2 - h^2)^2} = \frac{gr^2}{h^2 (v+h)} + \frac{gr^2}{h^2 (v-h)}$$

$$+ \frac{gr^2}{h^3} \log. \frac{v-h}{v+h} + \text{Const.} = \frac{2gr^2 v}{h^2 (v^2 - h^2)} + \frac{gr^2}{h^3} \times$$

$$\log. \frac{v-h}{v+h} + \text{Const.} \text{ Porro initio motus, seu evane-}$$

$$\text{sciente } \tau, \text{ abit } v \text{ in } c; \text{ proinde fit Const.} = -\frac{rc}{h^2}$$

$$- \frac{gr^2}{h^3} \log. \frac{c-h}{c+h}; \text{ adeoque tandem } \tau = \frac{2gr^2 v}{h^2 (v^2 - h^2)}$$

$$-\frac{rc}{h^2} + \frac{gr^2}{h^3} \log \frac{(v-h)(c+h)}{(v+h)(c-h)}.$$

11. Inventa expressione temporis per velocitatem, restat nunc ut tempus ipsum per spatii functionem repraesentatum detegamus. Itaque formula §. 2. $v =$

$$\sqrt{c^2 - \frac{2grx}{r+x}} \text{ mutetur primo in } v = \sqrt{\frac{c^2x - 2grx + c^2r}{r+x}};$$

$$\text{tum ob } dt = \frac{dx}{v} \text{ obveniet } dt = dx \sqrt{\frac{r+x}{c^2x - 2grx + rc^2}}$$

$$= dx \sqrt{\frac{r+x}{h^2x + rc^2}}. \text{ Ut integratio absolvatur, fiat}$$

$$\sqrt{\frac{r+x}{h^2x + rc^2}} = z, \text{ eritque } dx = \frac{(2rc^2 - 2rh^2)z dz}{(h^2z^2 - 1)^2},$$

$$\text{adeoque } dt = \frac{(2rc^2 - 2rh^2)z^2 dz}{(h^2z^2 - 1)^2} = \frac{2rc^2 - 2rh^2}{h^4} \times$$

$$\frac{z^2 dz}{(z^2 - \frac{1}{h^2})^2} = \frac{2rc^2 - 2rh^2}{h^4} \times \frac{z^2 dz}{(z - \frac{1}{h})^2 (z + \frac{1}{h})^2}.$$

Ut hujus quantitatis integrale eliciatur, pono

$$\frac{z^2 dz}{(z - \frac{1}{h})^2 (z + \frac{1}{h})^2} = \frac{Az dz + Bdz}{(z + \frac{1}{h})^2} + \frac{Cz dz + Ddz}{(z - \frac{1}{h})^2},$$

revocatisque fractionibus ad eundem denominatorem
aequationem sequentem consequor

$$\begin{aligned}
 A\zeta' - \frac{2A\zeta^2}{h} + \frac{A\zeta}{h^2} + \frac{B}{h^2} \\
 + C\zeta' + B\zeta^2 - \frac{2B\zeta}{h} + \frac{D}{h^2} \\
 = 0. \\
 + \frac{2C\zeta^2}{h} + \frac{C\zeta}{h^2} \\
 + D\zeta^2 + \frac{2D\zeta}{h} \\
 - \zeta^2
 \end{aligned}$$

Ex hac porro deducuntur aequalitates

$$\begin{aligned}
 A + C & \dots\dots\dots = 0; \\
 -\frac{2A}{h} + B + \frac{2C}{h} + D - 1 & = 0; \\
 \frac{A}{h^2} - \frac{2B}{h} + \frac{C}{h^2} + \frac{2D}{h} & \dots = 0; \\
 \frac{B}{h^2} + \frac{D}{h^2} & \dots\dots\dots = 0;
 \end{aligned}$$

Hinc invenitur

$$\begin{aligned}
 A & \dots\dots\dots = -\frac{1}{4}h; \\
 B & \dots\dots\dots = 0; \\
 C & \dots\dots\dots = \frac{1}{4}h; \\
 D & \dots\dots\dots = 0.
 \end{aligned}$$

Igitur

$$dt = \frac{(2rc^2 - 2h^2r)z^2 dz}{h^4(z + \frac{1}{h})^2(z - \frac{1}{h})^2} = - \frac{(rc^2 - rh^2)z dz}{2h^3(z + \frac{1}{h})^2} \\ + \frac{(rc^2 - rh^2)z dz}{2h^3(z - \frac{1}{h})^2} = - \frac{gr^2 z dz}{h^3(z + \frac{1}{h})^2} + \frac{gr^2 z dz}{h^3(z - \frac{1}{h})^2}.$$

$$\text{Jam vero est } S - \frac{gr^2 z dz}{h^3(z + \frac{1}{h})^2} = - \frac{gr^2}{h^4(z + \frac{1}{h})}$$

$$- \frac{gr^2}{h^3} \log.(z + \frac{1}{h}); \& S \frac{gr^2 z dz}{h^3(z - \frac{1}{h})^2} = - \frac{gr^2}{h^4(z - \frac{1}{h})}$$

$$+ \frac{gr^2}{h^3} \log.(z - \frac{1}{h}); \text{iccirco erit } t = - \frac{2gr^2 z}{h^4(z^2 - \frac{1}{h^2})}$$

$$+ \frac{gr^2}{h^3} \log. \frac{z - \frac{1}{h}}{z + \frac{1}{h}} + \text{Const.} = \frac{1}{h^2} \sqrt{(r + x)}$$

$$(h^2 x + rc^2) + \frac{gr^2}{h^3} \log. \frac{\sqrt{(r+x)} - \frac{1}{h} \sqrt{(h^2 x + rc^2)}}{\sqrt{(r+x)} + \frac{1}{h} \sqrt{(h^2 x + rc^2)}}$$

+ Const. Quum autem x evanescat una cum t , ori-

tur inde Const. = $-\frac{rc}{h^2} - \frac{gr^2}{h^3} \log. \frac{h-c}{h+c}$; ac de-

$$\text{mum } t = \frac{1}{h^2} \sqrt{(r+x)(h^2 x + rc^2)} - \frac{rc}{h^2} + \frac{gr^2}{h^3} x$$

$$\log. \frac{[h \sqrt{(r+x)} - \sqrt{(h^2 x + rc^2)}] (h+c)}{[h \sqrt{(r+x)} + \sqrt{(h^2 x + rc^2)}] (h-c)}.$$

12. Expendamus nunc paullo diligentius formula
superiorem §. 10., expressionem videlicet temporis

$$\text{per velocitatem, hoc est } t = \frac{2gr^2 v}{h^2(v^2 - h^2)} - \frac{rc}{h^2}$$

$$+ \frac{gr^2}{h^3} \log. \frac{(v-h)(c+h)}{(v+h)(c-h)}, \text{ atque in antecessum ani-}$$

mo reputemus, versari nos jam in hypothesi celerita-
tis initialis $c > \sqrt{2gr}$. Ponamus itaque, excessum
ipsius c^2 supra $2gr$ esse $= \varphi^2$: hinc prodibit valor

$$\text{temporis } t = \frac{2gr^2 v}{\varphi^2(v^2 - \varphi^2)} - \frac{rc}{\varphi^2} + \frac{gr^2}{\varphi^3} \times$$

$$\log. \frac{(v-\varphi)(c+\varphi)}{(v+\varphi)(c-\varphi)}. \text{ Ex hoc autem temporis valore}$$

palam fit, capto $v > \varphi$ velocitatem ascendenti corpo-
ri impressam decrescere usque ad valorem utcumque
paullo majorem quam φ tempore semper finito ac
determinato. At vero si accipiatur $v = \varphi$, invenitur

$$t = \frac{2gr^2 \varphi}{0} + \frac{gr^2}{\varphi^3} \log. 0 = \infty; \text{ constat enim } \log. 0$$

infinitum esse negativum, sed in immensum minus

quam infinitum alterum $\frac{2gr^2\phi}{0}$. En itaque mira at-

que insignis Motuum istiusmodi affectio: Si corpori sursum emisso velocitas imprimatur major quam $\sqrt{2gr}$, seu major quam 34531. ped. pro singulis secundis, excessu existente quolibet k , ea non decrescet ad excessum usque k nisi post tempus infinitum elapsum.

13. Valor alter temporis t per spatii functionem expressus §. 11. praebet in hac hypothese, qua su-

mitur $c^2 = 2gr + \phi^2$, aequationem $t = \frac{1}{\phi^2} \times$

$$\sqrt{(r+x)(\phi^2 x + rc^2)} - \frac{rc}{\phi^2} + \frac{2gr^2}{\phi^3} \times$$

$$\log. \frac{[\phi \sqrt{(r+x)} - \sqrt{(\phi^2 x + rc^2)}](\phi + c)}{[\phi \sqrt{(r+x)} + \sqrt{(\phi^2 x + rc^2)}](\phi - c)}. \text{ Hinc}$$

ergo assumpta altitudine x infinita reperitur t

$$= \frac{x}{\phi} + \frac{2gr^2}{\phi^3} \log. 0; \text{ est autem } \log. 0 \text{ infinitum ne-}$$

gativum, sed in immensum minus quam infinitum

$\frac{x}{\phi}$, quemadmodum ex Infinitorum Geometria facile

ostenditur. Propterea elicitur $t = \infty$.

14. Si denique tum celeritas initialis c , tum altitudo x accipiatur infinita, exsurgit tempus t finitum; quum id autem non statim appareat in praecedenti formula, sic breviter ostenditur: Quoniam ex hypothese $x = \infty$, & $c = \infty$, & praeterea $c = \sqrt{(\phi^2 + 2gr)}$, erit etiam $\phi = \infty$; hinc primus formulae terminus

$$\frac{1}{\phi^2} \sqrt{(r+x)(\phi^2 x + rc^2)} \text{ mutatur in } \frac{1}{\phi^2} \sqrt{\phi^2 x^2}$$

$$= \frac{x}{\phi}, \text{ terminus secundus } - \frac{rc}{\phi^2} \text{ convertitur in } - \frac{r}{\phi},$$

numerus vero logarithmi termini tertii numeratorem habet $[\phi \sqrt{(r+x)} - \sqrt{(\phi^2 x + rc^2)}](\phi + c) =$

$$\left(\phi \sqrt{(r+x)} - \sqrt{(\phi^2 x + \phi^2 r)} - \frac{gr^2}{\sqrt{(\phi^2 x + rc^2)}} \right) \times$$

$$2\phi = -2gr^2 \sqrt{\frac{1}{x}}, \text{ habetque denominatorem}$$

$$[\phi \sqrt{(r+x)} + \sqrt{(\phi^2 x + rc^2)}](\phi - c) =$$

$$2\phi \sqrt{x} (\phi \sqrt{r} - \phi \sqrt{r} - \frac{gr}{\phi}) = -2gr \sqrt{x}, \text{ adeo-}$$

$$\text{que numerus ipse est } = - \frac{2gr^2 \sqrt{\frac{1}{x}}}{-2gr \sqrt{x}} = \frac{r}{x}. \text{ Igitur}$$

$$t = \frac{x}{\phi} - \frac{r}{\phi} + \frac{gr^2}{\phi^3} \log. \frac{r}{x}, \text{ seu ob valores infinitesi-}$$

$$\text{mos } \frac{r}{\phi}, \text{ \& } \frac{gr^2}{\phi^3} \log. \frac{r}{x}, \text{ remanet } t = \frac{x}{\phi}, \text{ quantitati}$$

nimirum finitae, siquidem x , & c seu ϕ valo-
res habent infinitos ejusdem ordinis.

15. Nunc operae pretium est selecto aliquo exemplo
usum formularum §. 10., & 11. illustrare. Petitur
itaque tempus t , quo corpus sursum projectum velo-
citate $c = 2\sqrt{2gr}$, seu velocitate pedum paris. 69061,
378 singulis secundis ad sexaginta semidiametrorum ter-
restium altitudinem, seu ad Lunam usque perveniret.

$$\text{Temporis expressio supra inventa dat } t = \frac{2gr^2 v}{h^2(v^2 - h^2)}$$

$$- \frac{rc}{h^2} + \frac{gr^2}{h^3} \log. \frac{(v-h)(c+h)}{(v+h)(c-h)} =$$

$$\frac{1}{h^2} \sqrt{(r+x)(h^2x + rc^2)} - \frac{rc}{h^2} + \frac{gr^2}{h^3} \times$$

$$\log. \frac{[h\sqrt{(r+x)} - \sqrt{(h^2x + rc^2)}](h+c)}{[h\sqrt{(r+x)} + \sqrt{(h^2x + rc^2)}](h-c)}.$$

Est jam

$$g = 30, 2 \text{ ped.}$$

$$r = 19741200$$

$$gr = 596184240$$

$$c^2 = 8gr = 4769473920$$

$$c = 2\sqrt{2gr} = 69061, 378$$

$$h^2 = c^2 - 2gr = 3577105440$$

$$x = 6or = 1184472000$$

$$v^2 = c^2 - \frac{2grx}{r+x} = 3596652464, 2623$$

$$v = \sqrt{\left(c^2 - \frac{2grx}{r+x}\right)} = 59972, 0974$$

$$gr^2 v = 705835142475168576211, 200$$

$$\frac{1}{2} h^2 (v^2 - h^2) = 34960883412242658, 456$$

$$\frac{gr^2 v}{\frac{1}{2} h^2 (v^2 - h^2)} = \frac{2gr^2 v}{h^2 (v^2 - h^2)} = 20189, 28223$$

$$- \frac{rc}{h^2} = - 381, 13343$$

$$\sqrt{(r+x)} = 34701, 77517$$

$$\sqrt{(h^2 x + rc^2)} = 2081138239, 8289$$

$$\sqrt{(r+x)(h^2 x + rc^2)} = 72219191297746, 5584$$

$$\frac{1}{h^2} \sqrt{(r+x)(h^2 x + rc^2)} = 20189, 28223$$



$$-\frac{rc}{h^2} = -381, 13343$$

$$h = \sqrt{(c^2 - 2gr)} = 59808, 908$$

$$h^2 = 213942770167259, 52$$

$$\frac{gr^2}{h^2} = \frac{11769392318688000}{213942770167259, 52} = 55, 01187$$

$$v - h = 163, 1894$$

$$c + h = 128870, 2860$$

$$(v - h)(c + h) = 21030264, 65016840$$

$$v + h = 119781, 0054$$

$$c - h = 9252, 470$$

$$(v + h)(c - h) = 1108270159, 03333800$$

$$\frac{(v - h)(c + h)}{(v + h)(c - h)} = 0, 018975754$$

$$\log. \text{ tab. } \frac{(v - h)(c + h)}{(v + h)(c - h)} = -1, 721801$$

$$\log. \text{ hyp. } \frac{(v - h)(c + h)}{(v + h)(c - h)} = -1, 721801 \times 2, 302585 = -3, 964593$$

$$\frac{gr^2}{h^2} \log. \frac{(v - h)(c + h)}{(v + h)(c - h)} = 55, 01187 \times -3, 964593 = -218, 09967$$

$$h \sqrt{r+x} = 2075475278, 5792$$

$$\sqrt{h^2 x + rc^2} = 2081138239, 8289$$

$$h \sqrt{r+x} - \sqrt{h^2 x + rc^2} = -5662961, 2497$$

$$h+c = 128870, 286$$

$$[h \sqrt{r+x} - \sqrt{h^2 x + rc^2}](h+c) = -729787435855, 7564142$$

$$h \sqrt{r+x} + \sqrt{h^2 x + rc^2} = 4156613518, 4081$$

$$h-c = -9252, 470$$

$$[h \sqrt{r+x} + \sqrt{h^2 x + rc^2}](h-c) = -38458941880665, 3930070$$

$$\frac{[h \sqrt{r+x} - \sqrt{h^2 x + rc^2}](h+c)}{[h \sqrt{r+x} + \sqrt{h^2 x + rc^2}](h-c)} = A$$

$$= \frac{729787435855, 7564142}{38458941880665, 3930070} = 0, 018975754$$

$$\log. \text{tab. } A = -1, 721801$$

$$\log. \text{hyp. } A = -1, 721801 \times 2, 320585 = -3, 964593$$

$$\frac{gr^2}{h^3} \log. A = 55, 01187 \times -3, 964593 = -218, 09967$$

Igitur oritur $t'' = 20189, 28223 - 381, 13343 - 218, 09967 = 19590, 0413'' = 5^h. 26'. 30''$ temporis fiderei, seu $5^h. 24'. 52''$ temporis medii. Quare corpus celeritate pedum 69061, 378 pro unoquoque secundo fursum projectum, & a gravitate terrestri decrescente in ratione inversa duplicata distantiarum jugiter retardatum horis 5, minutis 24, secundis 52 ad altitudinem sexaginta semidiametrorum terrestrium pertingit.

16. In hypothesei gravitatis constantis, invenitur temporis expressio $t = \frac{c - v}{g} = \frac{c - \sqrt{(c^2 - 2gx)}}{g}$, quae factis substitutionibus exempli praecedentis apparet imaginaria: quod sane indicat, corpus ea velocitate fursum emissum in hypothesei gravitatis constantis non posse ad tantam altitudinem pervenire.



DISQUISITIO V.

*DE SIDERIBUS INTERVALLUM INTER
DATOS DUOS ALMICANTARATH IN-
TERCEPTUM VELOCISSIME TRAJI-
CIENTIBUS, SEU A DATA QUA-
LIBET ALTITUDINE AD ALIAM
QUAMLIBET DATAM TEM-
PORE QUAMMINIMO
PERTINGENTIBUS.*

I. **I**N Mathematicis investigationibus aliquando, licet infrequenter experiuntur Geometrae, Syntheticam Methodum, hoc est Synthesim Geometricam facilius ac tutius ad Problematis solutionem ducere quam ipsa Methodus Analytica, quae interdum per multiplices supputationum intricatissimarum moeandros id praestat, quod Synthesis brevissime & elegantissime absolvit. At nihilominus nemo negaverit, directam regiamque viam, qua tendit Analysis ad Verum ignotum assequendum, viae indirectae & obliquae, cui Synthesis inhae-

ret, longe esse anteponendam. Insignis certe Geometra Condorcetus *tom. III. Supplém. à l'Encyclopéd. Art. Méthode* non dubitat affirmare : *Les opérations de la Synthèse sont plus compliquées, sa marche plus difficile à suivre, ses résultats moins généraux. Elle demanderait pour bien des problèmes un travail impraticable : aussi a-t-elle été abandonnée de presque tous les Géomètres, & elle n'a plus pour elle que le nom de NEWTON, qui s'en servit, dit-on, pour cacher la route qu'il avoit suivie, & qui, sûr de l'admiration des grands Géomètres, avoit la foiblesse de vouloir encore étonner les esprits médiocres. Mais je ne saurois être de cet avis, soit parce que cette petite charlatannerie me paroît trop indigne de ce grand-homme, soit parce qu'il &c.*

2. Hinc est, quod Geometrae recentiores magnam sibi semper laudem pepererunt, si quandoque quaestionem aliquam Geometrica dumtaxat constructione seu Synthesi definitam ad Analysim feliciter revocarunt, seu ad generales formulas traduxerunt. Desiderabat magnus EULERUS in immortalis Opere *De Methodo inveniendi Lineas Curvas Maximi, Minimive proprietate gaudentes Cap. II. §. 39.* methodum aliquam a resolutione geometrica & lineari omnino liberam, per quam analytica generalique expressione repraesentari posset quantitas quaedam, quae per linearem dumtaxat con-

structionem ab ipso repraesentata Opus illud eximium & cedro dignissimum minus perfectum absolutumque efficiebat. Cum ecce summus Geometra De LA GRANGE invento *Variationum Calculo*, impletoque voto Euleriano (a) vix credibile dictu est, quantum inde nactus sit celebritatis & gloriae.

3. Novissime eximius idem Geometra De LA GRANGE in *Novis Actis Berolinensis Academiae* pro anno 1773., editis anno 1775. jure meritoque sibi plaudit, quod pervulgatum Problema De Sphaeroidum Ellipticarum Attractione, a sagacissimo Maclaurino ingeniosissima Synthesi jam pridem solutum, generali directaque methodo tractare, & ad analysim transferre sibi contigerit: hacque porro analytica solutione, tamquam argumento utitur adversus Analysis detractores, qui ut Synthesim, quam unice excoluerunt, in Coelum ferant, Analysim suggillant & carpunt. *Je me propose, inquit, dans ce Mémoire de faire voir que bien loin que le Problème dont il s'agit se refuse à l'Analyse, il peut être résolu par ce moyen d'une manière, si non plus simple, du moins plus directe & plus générale*

G 2

(a) Vid. *Mélang. de Phil. & de Math. de la Soc. Roy. de Turin* tom. II. *Essai d'une Nouvelle Méthode pour déterminer les Maxima, & les Minima des Formules intégrales indéfinies*, par Mr. De LA GRANGE.

que par la voie de la Synthese ; ce qui servira à détruire un des principaux argumens que les détracteurs de l'Analyse puissent apporter pour la rabaisser & pour prouver la supériorité de la méthode synthétique des Anciens.

4. Neque minorem consequutus est laudem hic Cl. Geometra; quod in nobilissimo Problemate De Rotatione Corporis nulla vi acceleratrice sollicitati quum binas solutiones Eulerianam, & Alembertianam minus directas ac generales observasset quippe quae notam assument positionem trium axium uniformis rotationis, methodum ipse invenerit omnino directam, generalem, ac mere analyticam, per quam nulla assumpta Axium rotationis proprietate (haec enim solutionis esse debet confectarium, non fundamentum) ad Problematis solutionem pervenitur (b). In ipso autem Opusculi

(b) Vid. *Nouvelle Solution du Problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice*, in *Actis Acad. Berol.* tom. cit.

Recentissime EULERUS in *Novis Commentariis Acad. Petropolitanae* tom. XX. Dissert. *De Nova Methodo Motum Corporum rigidorum determinandi*, idem Problema retractavit, & elegantissima analysi directe ac generalissime resolvit, demonstrata prius insigni ac pulcherrima corporum quorumque rigidorum proprietate, quod quomodocumque corpus rigidum ex statu initiali in alium quemlibet statum transferatur, in eo semper talis axis definiri possit, cujus directio in utroque statu maneat invariata.

ingressu vere proficitur, c'est toujours contribuer à l'avancement des Mathématiques que de montrer comment on peut résoudre les mêmes questions & parvenir aux mêmes résultats par des voies très différentes; les méthodes se prêtent par ce moyen un jour mutuel & en acquièrent souvent un plus grand degré d'évidence & de généralité.

5. Quum hujusmodi considerationes se mihi identidem offerrent, animoque saepius obversarentur, novissime factum est, ut tomum vicesimum nuper editum Novorum Academiae Peropolitanae Commentariorum evolvens in Astronomicam Dissertationem inciderim illustris Euleri *De Trajectu citissimo Stellae per duos circulos Almicantharath* datos pro qualibet elevatione Poli; ubi Analysta incomparabilis, repudiata praeter morem analysi quasi ad rem minus idonea, Problema aggreditur via ferme lineari ac synthetica, solutionemque nanciscitur simplicem oppido & elegantem. Perculit me res nova & inaudita, magnum Eulerum in Problematis difficilis solutione Analysis suae valedicere, ac Synthesi inhaerere voluisse: sed admirationem omnem abjeci cum in Euleriani Schediasmatis conclusione haec mihi verba occurrerunt: *Hoc igitur modo sine dubio solutionem simplicissimam problematis propositi sumus nacti, quae, nisi hoc artificium fuisset adhibitum, in calculos vehementer prolixos praecipitasset.*

6. Hac summi Geometrae admonitione deterritus, & inextricabilem calculorum molem ab Eulero prae-nuntiata reformidans vix audebam de directa & analytica tam pulchri Problematis solutione cogitare; sed tanti Viri auctoritatem vicit cupiditas experiendi analysis vires in Problemate, cujus analytica solutio ideo Eulero videri potuit immaniter operosa & fere inaccessible, quod per arduum & impeditum iter ad metam fortasse properaverit. At non una est ad veritatem via, neque semper contingit, ut via tutior ac brevior exercitatissimo cuique pateat. Quum itaque Eulerianum hoc Problema ad Analysis revocare statuissem, insperanti mihi contigit, ut via satis expedita aequationem nanciscerer biquadraticam, quam secus atque Eulerus pronuntiavit tam evidenter aperteque resolubilem reperi, ut nihil facilius, nihil simplicius expectari posse videretur. Ecce jam totius rei seriem & ordinem.

Fig. 4. 7. Circulus $NN'Q$ repraesentat Horizontem loci; P Polum; Z Zenith; S & S' Sidus, paralleli arcum SS' inter duos datos Almickantarath interceptum citissime trajiciens. Ductis porro circulorum maximorum arcibus, quos schema exhibet, patet esse PQ altitudinem Poli seu loci latitudinem, ejusque complementum PZ ; SN altitudinem Sideris, & illius

complementum SZ ; $S'N'$ altitudinem aliam Sideris ,
ejusque complementum $S'Z$; PS , vel sibi aequalem
 PS' esse complementum declinationis ejusdem Sideris ;
denique ZPS angulum unum horarium , ZPS' alte-
rum . Fiat modo .

Altitudo Astri SN . . . = a

Altitudo alia $S'N'$. . . = a'

Latitudo Terrestris PQ . . . = l

Astri declinatio . . . = x

Angulus Horarius ZPS . . . = h

Angulus alter Horarius ZPS' . . . = h'

8. Hoc facto manifestum est, fore

$$\sin. PZ = \cos. l$$

$$\sin. ZS = \cos. a$$

$$\sin. ZS' = \cos. a'$$

$$\sin. PS = \sin. PS' = \cos. x$$

rursus

$$\cos. PZ = \sin. l$$

$$\cos. ZS = \sin. a$$

$$\cos. ZS' = \sin. a'$$

$$\cos. PS = \cos. PS' = \sin. x$$

Constat vero ex Trigonometria Sphaerica , in
Triangulo ZPS hanc dari aequalitatem $\cos. ZPS$
= $\frac{\cos. ZS - \cos. PZ \cos. PS}{\sin. PZ \sin. PS}$, & in triangulo ZPS'

$$\text{istam } \cos. ZPS' = \frac{\cos. ZS' - \cos. PZ \cos. PS'}{\sin. PZ \sin. PS'}$$

9. Factis substitutionibus hae aequalitates nanciscuntur hanc formam $\cos. h = \frac{\sin. a - \sin. l \sin. x}{\cos. l \cos. x}$,

$$\cos. h' = \frac{\sin. a - \sin. l \sin. x}{\cos. l \cos. x}. \text{ Quoniam in hoc proble-}$$

mate quaeritur declinatio Sideris, quod brevissimo tempore paralleli arcum SS' inter duos datos Almicantharath conclusum transcurrit, hujusque temporis mensura est angulus $SPS' = ZPS' - ZPS = h' - h$; fiet idcirco $d. (h' - h) = dh' - dh = 0$. Ut valores eliciam fluxionum dh' & dh , fumo differentialia praedictarum aequalitatum, & invenio

$$- dh \sin. h = \frac{dx (\sin. a \sin. x - \sin. l)}{\cos. l \cos.^2 x}, \text{ \&}$$

$$- dh' \sin. h' = \frac{dx (\sin. a \sin. x - \sin. l)}{\cos. l \cos.^2 x}; \text{ proindeque}$$

$$- dh = \frac{dx (\sin. a \sin. x - \sin. l)}{\sin. h \cos. l \cos.^2 x},$$

$$dh' = - \frac{dx (\sin. a \sin. x - \sin. l)}{\sin. h' \cos. l \cos.^2 x}.$$

10. Porro habetur $\sin. h = \frac{1}{\cos. l \cos. x} \times$

$$\sqrt{(2 \sin. a \sin. l \sin. x - \sin.^2 a - \sin.^2 x + \cos.^2 l)}, \&$$

$$\sin. h = \frac{1}{\cos. l \cos. x} \times$$

$$\sqrt{(2 \sin. a \sin. l \sin. x - \sin.^2 a - \sin.^2 x + \cos.^2 l)}.$$

Igitur

$$dh = \frac{dx (\sin. a \sin. x - \sin. l)}{\cos. x \sqrt{(2 \sin. a \sin. l \sin. x - \sin.^2 a - \sin.^2 x + \cos.^2 l)}}$$

$$= \frac{dx (\sin. a \sin. x - \sin. l)}{\cos. x \sqrt{(2 \sin. a \sin. l \sin. x - \sin.^2 a - \sin.^2 x + \cos.^2 l)}}$$

$$= 0. \text{ Quare } \frac{\sin. a \sin. x - \sin. l}{\sqrt{(2 \sin. a \sin. l \sin. x - \sin.^2 a - \sin.^2 x + \cos.^2 l)}}$$

$$= \frac{\sin. a \sin. x - \sin. l}{\sqrt{(2 \sin. a \sin. l \sin. x - \sin.^2 a - \sin.^2 x + \cos.^2 l)}}$$

11. Ab hac postrema aequatione elimino asymmetriam, & post debitas reductiones nanciscor aequationem biquadraticam hanc

$$\begin{aligned}
& (\sin^2 a - \sin^2 \delta) \sin^4 x + (2 \sin a \sin^2 \delta \sin l \\
& - 2 \sin \delta \sin^2 a \sin l + 2 \sin \delta \sin l - 2 \sin a \sin l) \sin^3 x \\
& - \cos^2 l (\sin^2 a - \sin^2 \delta) \sin^2 x - (2 \sin a \sin^2 \delta \sin l \\
& - 2 \sin \delta \sin^2 a \sin l + 2 \sin \delta \sin l - 2 \sin a \sin l) \sin x \\
& + \sin^2 \delta \sin^2 l - \sin^2 a \sin^2 l = 0.
\end{aligned}$$

In hac autem aequatione statim apparet, coefficientem secundi termini quadrinomialium contrahi posse in binomialium $-(2 \sin a \cos^2 \delta - 2 \sin \delta \cos^2 a) \sin l$, & coefficientem quarti in binomialium oppositum $(2 \sin a \times \cos^2 \delta - 2 \sin \delta \cos^2 a) \sin l$. Quapropter divisa aequatione per $\sin^2 a - \sin^2 \delta$, invenitur

$$\begin{aligned}
\sin^4 x & - \frac{(2 \sin a \cos^2 \delta - 2 \sin \delta \cos^2 a) \sin l}{\sin^2 a - \sin^2 \delta} \sin^3 x \\
& - \cos^2 l \sin^2 x + \frac{(2 \sin a \cos^2 \delta - 2 \sin \delta \cos^2 a) \sin l}{\sin^2 a - \sin^2 \delta} \sin x \\
& - \sin^2 l = 0.
\end{aligned}$$

12. Jam vero aequationem hanc vel oscitanter consideranti statim occurrit, utramque hypothesin $\sin x = 1$, & $\sin x = -1$ ipsi aequationi satisfacere, ac proinde $\sin^2 x - 1$ esse illius divisorem. Quamobrem divisione absoluta oritur quadratica aequatio

$$\sin.^2 x = \frac{(2 \sin. a \cos.^2 a - 2 \sin. a \cos.^2 a) \sin. l}{\sin.^2 a - \sin.^2 a} \sin. x$$

$$+ \sin.^2 l = 0, \text{cujus radix est } \sin. x = \frac{\sin. a \cos.^2 a - \sin. a \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 a} \sin. l$$

$$\pm \sin. l \sqrt{\left(\frac{\sin. a \cos.^2 a - \sin. a \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 a} \right)^2 - 1}.$$

13. Itaque radices omnes aequationis superioris habemus in potestate, nempe

$$1. \sin. x = 1$$

$$2. \sin. x = -1$$

$$3. \sin. x = \frac{\sin. a \cos.^2 a - \sin. a \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 a} \sin. l$$

$$+ \sin. l \sqrt{\left(\frac{\sin. a \cos.^2 a - \sin. a \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 a} \right)^2 - 1}$$

$$4. \sin. x = \frac{\sin. a \cos.^2 a - \sin. a \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 a} \sin. l$$

$$- \sin. l \sqrt{\left(\frac{\sin. a \cos.^2 a - \sin. a \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 a} \right)^2 - 1}$$

14. Expendamus jam paullo diligentius harum radicum indolem, & quae Problemati solvendo pares

sint, quaeve haudquaquam idoneae indigitemus. Ac primo liquet, radices priores duas $\sin. x = 1$, $\sin. x = -1$ ad rem nostram non esse; nam Sidera integro quadrante Boream, & Austrum versus ab Aequatore remota, atque adeo Polum utrumque occupantia nec detecta unquam sunt, nec diurna, si existerent, raperentur vertigine, quae tamen Problematis constituit hypothesim.

15. Executienda nunc restat tertia radix

$$\sin. x = \frac{\sin. a \cos.^2 a - \sin. a \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 a} \sin. l$$

$$+ \sin. l \sqrt{\left(\frac{\sin. a \cos.^2 a - \sin. a \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 a} \right)^2 - 1}.$$

Adverto itaque statim, aequationem superiorem biquadraticam produci tum ex positione $dh' - dh = 0$, tum ex positione $dh' + dh = 0$; nam in aequalitatibus $dh' = dh$, & $dh' = -dh$ quadratis utrinque membris signorum oppositio evanescit, habeturque $dh'^2 = dh^2$, atque inde biquadratica aequatio §. 11. Porro tertia haec radix $\sin. x$ spectat ad positionem $dh' + dh = 0$, minime vero ad positionem nostram $dh' - dh = 0$, adeoque in hoc problemate, quod nititur hypothesi $dh' - dh = 0$, est omnino rejicienda. Id demonstrabitur, si in

expressione $dh + dh'$ substituto valore hujus radicis
quantitas producat eviderenter nihilo aequalis; quod
fane contingere, ita ostendo: Ponamus demonstratio-
nis contrahendae gratia, Almicantharum alterutrum cum
Horizonte congruere, ita ut ipsius altitudo a sit $= 0$;
oriturque in hac hypothese tertia haec radix $\sin. x$

$$= \frac{\sin. l}{\sin. a} + \sin. l \sqrt{\left(\frac{1}{\sin.^2 a} - 1 \right)} = \frac{\sin. l + \sin. l \cos. a}{\sin. a}.$$

Loco $\sin. x$ substituo hunc valorem in expressione
 $dh + dh'$ §. 10., & consequor $dh + dh'$

$$= -dx \sin. l \cos. a : \left(\cos. x \sqrt{\left(2 \sin.^2 l + 2 \sin.^2 l \cos. a \right.} \right. \\ \left. \left. - \sin.^2 a + \cos.^2 l - \frac{\sin.^2 l}{\sin.^2 a} - \frac{2 \sin.^2 l \cos. a}{\sin.^2 a} - \frac{\sin.^2 l \cos.^2 a}{\sin.^2 a} \right) \right)$$

$$+ dx \sin. l : \left(\cos. x \sqrt{\left(\cos.^2 l - \frac{\sin.^2 l}{\sin.^2 a} \right.} \right. \\ \left. \left. - \frac{2 \sin.^2 l \cos. a}{\sin.^2 a} - \frac{\sin.^2 l \cos.^2 a}{\sin.^2 a} \right) \right);$$

& si primum radicale dicatur $\sqrt{A}$, alterum $\sqrt{B}$
fiet $dh + dh' = - \frac{dx \sin. l \cos. a \sqrt{B} + dx \sin. l \sqrt{A}}{\cos.^2 x \sqrt{AB}}.$

Est autem $\cos. a \sqrt{B} = \sqrt{(B - B \sin.^2 a)} = \sqrt{A}.$

Igitur $dh + dh' = 0$. Quapropter tertia haec radix

aliam respicit hypothesim a nostra diversam, nec est proinde attendenda.

16. Sola ergo superest quarta radix

$$\sin. x = \frac{\sin. a \cos.^2 \delta - \sin. \delta \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \delta} \sin. l$$

$$- \sin. l \sqrt{\left(\left(\frac{\sin. a \cos.^2 \delta - \sin. \delta \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \delta} \right)^2 - 1 \right)},$$

quae Problematis solutionem praebet. Hic autem primo occurrit, in regionibus sub aequatore sitis, ubi scilicet $l = 0$, sidera in aequatore ipso constituta iter illud citissimum conficere; in hac quippe hypothesi invenitur $\sin. x = 0$: in regionibus vero reliquis citra vel ultra aequatorem sidera citissimi trajectory declinationem semper aliquam habent, quandoquidem si nul-

lam haberent, hoc est si $\sin. x$, seu $\frac{\sin. a \cos.^2 \delta - \sin. \delta \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \delta} \sin. l$

$$- \sin. l \sqrt{\left(\left(\frac{\sin. a \cos.^2 \delta - \sin. \delta \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \delta} \right)^2 - 1 \right)}$$

foret nihilo aequalis, prodiret $-\sin.^2 l = 0$, quod est absurdum.

17 Si altitudo a accipiatur $= 90^\circ$, & sidera quaerantur, quorum ascensus ab altitudine altera δ ad Zenith sit omnium celerrimus, invenitur $\sin. x = \sin. l$;

nam, quum in hac hypothefi fit $\sin. a = 1$, $\cos. a = 0$, evanescit quantitas radicalis, ac remanet $\sin. x = \sin. l$, adeoque $x = l$. Quocirca fidera, quorum declinatio est Poli elevationi aequalis, citiffime ab altitudine qualibet data ad Zenith progrediuntur. Sed unicum est in hac hypothefi *minimum tempus*, nec proinde cum aliis conferendum, fiquidem una tantum est declinatio Aftorum per Zenith tranfeuntium. Idem reperitur, fi facto ut prius $a = 90^\circ$, fumatur $d = 0$, feu quaeratur declinatio fiderum ab horizonte ad zenith celerrime afcendentium.

18. Congruente alterutro Almicantarath cum Horizonte, feu facto $d = 0$, atque hinc $\sin. d = 0$, $\cos. d = 1$, oritur $\sin. x = \frac{\sin. l - \sin. l \cos. a}{\sin. a}$

$= \sin. l \frac{1 - \cos. a}{\sin. a}$. Liquet autem, effe $\tan. \frac{1}{2} a$

$= \frac{1 - \cos. a}{\sin. a}$; propterea fit $\sin. x = \sin. l. \tan. \frac{1}{2} a$. Est

porro $\tan. \frac{1}{2} a$ femper unitate minor praeter unicum cafum, quo est $a = 90^\circ$, & ideo $\tan. \frac{1}{2} a = 1$: igitur fidera, quae ab Horizonte ad datam altitudinem breviffimo tempore attolluntur, minus ab aequatore distant quam locus terreftis, eaque tantum, quae Zenith diurna vertigine attingunt, eandem habent ab

aequatore distantiam ac regio terrestris.

19. Minimum autem tempus, quo sidera ab Horizonte ad datam altitudinem perveniunt, invenitur in hunc modum: Ex §. 9. est $\sin. h' (\sin. a \sin. x - \sin. l) + \sin. h \sin. l = 0$; adeoque substituto valore $\sin. x$,

$$\text{fit } \sin h = \sin h' \cos. a. \text{ Rursum } \cos. h' = - \frac{\sin. l \sin. x}{\cos. l \cos. x},$$

$$\& \cos. h = \frac{\sin. a}{\cos. l \cos. x} + \cos. h'. \text{ Igitur } \cos. (h' - h)$$

$$= \cos. h' \cos. h + \sin. h' \sin h = \frac{\sin. a \cos. h'}{\cos. l \cos. x}$$

$$+ \cos.^2 h' + \cos. a \sin.^2 h' = \frac{\sin. a \cos. h'}{\cos. l \cos. x} + \cos.^2 h'$$

$$- \cos. a \cos.^2 h' + \cos. a, \text{ seu subrogato valore } \cos. h'$$

$$= - \frac{\sin. l \sin. x}{\cos. l \cos. x}, \& \cos.^2 h' = \frac{\sin.^2 l \sin.^2 x}{\cos.^2 l \cos.^2 x}, \text{ prodit}$$

$$\cos. (h' - h) = \cos. a + \frac{[(1 - \cos. a) \sin. l \sin. x - \sin. a] \sin. l \sin. x}{\cos.^2 l \cos.^2 x}$$

$$\text{Est porro §. 18. } (1 - \cos. a) \sin. l = \sin. a \sin. x;$$

$$\text{propterea fiet } \cos. (h' - h) = \cos. a + \frac{\sin. a \sin. l \sin. x (\sin.^2 x - 1)}{\cos.^2 l \cos.^2 x}$$

$$= \cos. a - \frac{\sin. a \sin. l \sin. x}{\cos.^2 l} = \cos. a - \sin. a \tan^2 l \tan. \frac{1}{2} a.$$

Quum autem constet, esse $\text{tang.}^{\frac{1}{2}} a$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos. a}{1 + \cos. a}} = \frac{\sqrt{(1 - \cos.^2 a)}}{1 + \cos. a} = \frac{\sin. a}{1 + \cos. a},$$

$$\text{atque inde } \sin. a \text{ tang.}^{\frac{1}{2}} a = \frac{\sin.^2 a}{1 + \cos. a} = \frac{1 - \cos.^2 a}{1 + \cos. a}$$

$$= 1 - \cos. a = 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a; \text{ oritur iccirco } \cos. (h - h)$$

$$= \cos. a - 2 \text{ tang.}^2 l \sin.^2 \frac{1}{2} a = 1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a$$

$$- 2 \text{ tang.}^2 l \sin.^2 \frac{1}{2} a = 1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a (1 + \text{tang.}^2 l)$$

$$= 1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a \sec.^2 l = 1 - \frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} a}{\cos.^2 l}. \text{ Inventa}$$

$$\text{est igitur expressio simplex \& concinna } 1 - \frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} a}{\cos.^2 l}$$

pro cosinu illius arcus $h - h$, qui tempus quaesitum repraesentat. Sed simplicior adhuc reddi potest hujus-

$$\text{modi formula; haec enim fit } \frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} a}{\cos.^2 l} =$$

$$1 - \cos. (h - h) = 2 \sin.^2 \frac{1}{2} (h - h). \text{ Quocirca } \sin. \frac{1}{2} (h - h)$$

$$= \frac{\sin. \frac{1}{2} a}{\cos. l}, \text{ expressio simplicissima semiarculus tempus}$$

dimidium propositum metientis.

20. Si dimidium datae altitudinis aequetur complemento elevationis Poli, hoc est $\frac{1}{2} a = 90^\circ - l$,

H

invenitur declinatio Astri citissime ascendentis aequalis ejusdem altitudinis dimidio: nam $\sin. x = \sin. l \tan. \frac{1}{2} a = \sin. \frac{1}{2} a$. Tempus vero ascensus Astri ab horizonte ad altitudinem a elicitur ex formula $\sin. \frac{1}{2} (h' - h)$

$$= \frac{\sin. \frac{1}{2} a}{\cos. l} = \frac{\sin. \frac{1}{2} a}{\sin. \frac{1}{2} a} = 1; \text{ unde oritur } \frac{1}{2} h' - \frac{1}{2} h$$

$= 90^\circ$, & $h' - h = 180^\circ$, ex quo habentur 12.^{h.} temporis fiderei, vel 11.^{h.} 58. 2ⁿ temporis medii. In hac enim hypothefi parallelus ab Astro descriptus tangitur ab horizonte & almicantharath in binis oppositis punctis, seu semiperipheria distantibus. Si autem dimidium altitudinis datae excedat complementum elevationis Poli, nanciscimur temporis expressionem omnino repugnantem, seu $\sin. \frac{1}{2} (h' - h) = \frac{\sin. \frac{1}{2} a}{\cos. l} > 1$, quod

est absurdum. Sane in hac hypothefi nullum est Astrum, cujus parallelus horizonti simul & dato almicantharath occurrat; paralleli enim omnes horizontem secantes vel tangentes ad almicantharath non protenduntur, & qui almicantharath secant vel tangunt ad horizontem non pertingunt.

21. In regionibus aequatoriis sidera, quae omnium velocissime transeunt ab uno ad alterum almicantharath, sunt ea, quae aequatorem ipsum describunt seu quo-

rum nulla est declinatio; nam in formula §. 16. sumpto $l = 0$, oritur $\sin. x = 0$. Tempus autem hujusce transitus est $= a - \delta$; quum in hac hypothese sint a , & δ arcus aequatoris per zenith transeuntis, simulque complementa angulorum, vel arcuum h , & h' ; ac proinde $h' - h = a - \delta$.

22. Ad rei totius illustrationem operae pretium est exemplum afferre, & formulae §. 16. evolutionem ob oculos ponere. Quaeritur itaque in hac Urbe TINCINI ejus Sideris declinatio quod brevissimo tempore ab altitudine $\delta 20^\circ$ ad altitudinem $a 50^\circ$ pertingit.

En calculi typum.

δ		$= 20^\circ$
a		$= 50^\circ$
l		$= 45^\circ$. 11'
$\log. \cos. \delta$		$= 9, 9729858$
$\log. \cos.^2 \delta$		$= 9, 9459716$
$\log. \sin. a$		$= 9, 8842540$
$\log. \sin. a \cos.^2 \delta$		$= 9, 8302256$
$\sin. a \cos.^2 \delta$		$= 0, 676434$
$\log. \cos. a$		$= 9, 8080675$
$\log. \cos.^2 a$		$= 9, 6161350$

$$\begin{aligned}
\log. \sin. a & \dots \dots \dots = 9, 5340517 \\
\log. \sin. a \cos.^2 a & \dots \dots \dots = 9, 1501867 \\
\sin. a \cos.^2 a & \dots \dots \dots = 0, 1413145 \\
\sin. a \cos.^2 a - \sin. a \cos.^2 a & \dots \dots = 0, 5351195 \\
\log. \sin.^2 a & \dots \dots \dots = 9, 7685080 \\
\sin.^2 a & \dots \dots \dots = 0, 586824 \\
\log. \sin.^2 a & \dots \dots \dots = 9, 0681034 \\
\sin.^2 a & \dots \dots \dots = 0, 116978 \\
\sin.^2 a - \sin.^2 a & \dots \dots \dots = 0, 469846 \\
\log. (\sin. a \cos.^2 a - \sin. a \cos.^2 a) & \dots = 9, 7284508 \\
\log. (\sin.^2 a - \sin.^2 a) & \dots \dots = 9, 6719555 \\
\log. \frac{\sin. a \cos.^2 a - \sin. a \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 a} & \dots = 0, 0564953 \\
\log. \sin. l & \dots \dots \dots = 9, 8508702 \\
\log. \frac{\sin. a \cos.^2 a - \sin. a \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 a} \sin. l & = 9, 9073655 \\
\frac{\sin. a \cos.^2 a - \sin. a \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 a} \sin. l & \dots = 0, 807915 \\
\log. \left(\frac{\sin. a \cos.^2 a - \sin. a \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 a} \right)^2 & = 0, 1129906
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\sin. a \cos.^2 \delta - \sin. \delta \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \delta} \right)^2 \dots\dots\dots 1,29715$$

$$\left(\frac{\sin. a \cos.^2 \delta - \sin. \delta \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \delta} \right)^2 - 1 \dots\dots\dots 0,29715$$

$$\log. \left(\left(\frac{\sin. a \cos.^2 \delta - \sin. \delta \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \delta} \right)^2 - 1 \right) \dots\dots\dots 9,4729757$$

$$\log. \sqrt{\left(\left(\frac{\sin. a \cos.^2 \delta - \sin. \delta \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \delta} \right)^2 - 1 \right)} \dots\dots\dots 9,7364878$$

$$\log. \sin. l \sqrt{\left(\left(\frac{\sin. a \cos.^2 \delta - \sin. \delta \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \delta} \right)^2 - 1 \right)} \dots\dots\dots 9,5873580$$

$$\sin. l \sqrt{\left(\left(\frac{\sin. a \cos.^2 \delta - \sin. \delta \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \delta} \right)^2 - 1 \right)} \dots\dots\dots 0,386686$$

$$\sin. x \dots\dots\dots 0,421229$$

Igitur sideris declinatio quaesita $x = 24^\circ. 54'. 44''$

23. Res nunc postulat, ut formula §. 16. valorem $\sin. x$ repraesentans brevior, simplicior, & ad usum magis idonea ac parata reddatur. Hoc autem ita conficio: Notum est, dato quovis angulo ϕ esse $\sin. \frac{1}{2} \phi$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos. \phi}{2}}, \text{ \& } \cos. \frac{1}{2} \phi = \sqrt{\frac{1 + \cos. \phi}{2}}. \text{ Igi-}$$

$$\text{tur } \sin. \frac{1}{2} (a + d) = \sqrt{\frac{1 - \cos. (a + d)}{2}}, \&$$

$$\cos. \frac{1}{2} (a - d) = \sqrt{\frac{1 + \cos. (a - d)}{2}}; \text{ atque inde}$$

$$\frac{\sin. \frac{1}{2} (a + d)}{\cos. \frac{1}{2} (a - d)} = \sqrt{\frac{1 - \cos. (a + d)}{1 + \cos. (a - d)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \sin. a \sin. d - \cos. a \cos. d}{1 + \sin. d \sin. a + \cos. a \cos. d}}$$

$$= \frac{1 + \sin. a \sin. d - \cos. a \cos. d}{\sqrt{[(1 + \sin. a \sin. d)^2 - \cos.^2 a \cos.^2 d]}}$$

$$= \frac{1 + \sin. a \sin. d - \cos. a \cos. d}{\sqrt{(1 + 2 \sin. a \sin. d + \sin.^2 a \sin.^2 d - \cos.^2 a \cos.^2 d)}}$$

$$= \frac{1 + \sin. a \sin. d - \cos. a \cos. d}{\sin. a + \sin. d}$$

$$= \frac{(\sin. a - \sin. d) (1 + \sin. a \sin. d - \cos. a \cos. d)}{\sin.^2 a - \sin.^2 d}$$

$$= \frac{\sin. a \cos.^2 d - \sin. d \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 d} - \frac{\cos. a \cos. d (\sin. a - \sin. d)}{\sin.^2 a - \sin.^2 d}.$$

$$\text{Est porro quantitas } \frac{\cos. a \cos. d (\sin. a - \sin. d)}{\sin.^2 a - \sin.^2 d}$$

$$= \frac{\cos. \dot{a} (\sin. a - \sin. \dot{a})}{\sin.^2 a - \sin.^2 \dot{a}} \sqrt{(1 - \sin.^2 a)}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos.^2 \dot{a} (\sin.^2 a - 2 \sin. a \sin. \dot{a} + \sin.^2 \dot{a}) (1 - \sin.^2 a)}{(\sin.^2 a - \sin.^2 \dot{a})^2}},$$

quae postrema expressio per idoneas reductiones con-

vertitur in $\sqrt{\left(\left(\frac{\sin. a \cos.^2 \dot{a} - \sin. \dot{a} \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \dot{a}}\right)^2 - 1\right)}.$

Igitur postremo $\sin. x = \frac{\sin. a \cos.^2 \dot{a} - \sin. \dot{a} \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \dot{a}} \sin. l$

$$- \sin. l \sqrt{\left(\left(\frac{\sin. a \cos.^2 \dot{a} - \sin. \dot{a} \cos.^2 a}{\sin.^2 a - \sin.^2 \dot{a}}\right)^2 - 1\right)}$$

$$= \frac{\sin. l \sin. \frac{1}{2} (a + \dot{a})}{\cos. \frac{1}{2} (a - \dot{a})}; \text{ quae sane expressio simplicitate}$$

& elegantia cum simplicissimis & elegantissimis certat.

24. Eapropter sinus declinationis quaesitae est quartus proportionalis ad cosinum semidifferentiae datarum altitudinum, vel semidistantiae binorum Almickantarath, ad sinum semisummae earundem altitudinum, & ad sinum latitudinis terrestris. Atque ideo in superiori exemplo §. 22. habebitur

$\log. \sin. l$	9, 8508702
$\log. \sin. \frac{1}{2} (a + d)$	9, 7585913
$\log. \sin. l \sin. \frac{1}{2} (a + d)$	9, 6094615
$\log. \cos. \frac{1}{2} (a - d)$	9, 9849438
$\log. \sin. x$	9, 6245177

Igitur $x = 24^{\circ} 54' 44''$, prorsus idem ac supra §. 22.

25. Inventa declinatione Sideris brevissimo tempore per binos datos Almicantharum transeuntis, invenitur etiam tempus ipsius transitus, hoc est arcus $h' - h$

in hunc modum: Per §. 9. est $\cos. h = \frac{\sin. a}{\cos. l \cos. x}$
 $- \tan. l \tan. x$, & $\cos. h' = \frac{\sin. d}{\cos. l \cos. x}$

$- \tan. l \tan. x$. Ergo dabitur tum $\cos. h$, tum $\cos. h'$; proindeque etiam h , & h' . Quocirca angulus $h' - h$ datus pariter erit, qui statim in tempus convertitur. Sic in exemplo praecedenti

$\log. \sin. a$	9, 8842540
$\log. \cos. l$	9, 8480909
$\log. \cos. x$	9, 9575854
$\log. \cos. l \cos. x$	9, 8056763

$$\log. \frac{\sin. a}{\cos. l \cos. x} \dots \dots \dots 0,0785777$$

$$\frac{\sin. a}{\cos. l \cos. x} \dots \dots \dots 1,1983336$$

$$\log. \tan. l \dots \dots \dots 0,0027793$$

$$\log. \tan. x \dots \dots \dots 9,6669332$$

$$\log. \tan. l \tan. x \dots \dots \dots 9,6697125$$

$$- \tan. l \tan. x \dots \dots \dots -0,4674256$$

$$\frac{\sin. a}{\cos. l \cos. x} - \tan. l \tan. x = \cos. h \dots 0,7309080$$

$$h \dots \dots \dots 43^{\circ} 2'. 15''$$

$$\log. \sin. a \dots \dots \dots 9,5340517$$

$$\log. \cos. l \cos. x \dots \dots \dots 9,8056763$$

$$\log. \frac{\sin. a}{\cos. l \cos. x} \dots \dots \dots 9,7283754$$

$$\frac{\sin. a}{\cos. l \cos. x} \dots \dots \dots 0,5350266$$

$$- \tan. l \tan. x \dots \dots \dots -0,4674256$$

$$\frac{\sin. a}{\cos. l \cos. x} - \tan. l \tan. x = \cos. h' \dots 0,0676010$$

$$h' \dots \dots \dots 86^{\circ} 7'. 26''$$

negativae, spectari ideo potuerunt veluti positivae, & $\sin. \frac{1}{2} (h - h')$ permutari poterit cum $\sin. \frac{1}{2} (h - h')$. Quum autem sit $\frac{1}{2} a = 9^\circ$, si fuerit $l = 81^\circ$, orietur $\sin. \frac{1}{2} (h - h') = 1$, hoc est $h - h' = 180^\circ$: videlicet minimi Crepusculi duratio in latitudine terrestri 81° constat 12.^{hor.} fidereis, vel 11.^{h.} 58.^{m.} 2.^{s.} solaribus mediis. In latitudine autem majori duratio elicitur absurda, nimirum $\sin. \frac{1}{2} (h - h') > 1$. Duratio demum minimi Crepusculi brevissima, seu *Minimarum Minima* sub aequatore manifestatur, & quidem aequinoctiorum tempore; nam fit $\sin. x = - \sin. l \tan. \frac{1}{2} a = 0$, & $\sin. \frac{1}{2} (h - h') = \frac{\sin. \frac{1}{2} a}{\cos. l} = \sin. \frac{1}{2} a = \sin. 9^\circ$, seu $h - h' = 18^\circ$; quod praebet 1.^{hor.} 12.^{m.} temporis fiderei, vel 1.^{h.} 11.^{m.} 47.^{s.} temporis medii.

28. In hac nostra Ticinensi latitudine dies, & duratio minimi Crepusculi ex formulis $\sin. x =$

$$- \sin. l \tan. \frac{1}{2} a, \text{ \& } \sin. \frac{1}{2} (h - h') = \frac{\sin. \frac{1}{2} a}{\cos. l} \text{ propere}$$

inveniuntur:

l		45. ^o 11'
a		18. ^o
$\log. \sin. l$		9, 8508702

DISQUISITIO VI.
 DE ASTRONOMIAE NAUTICAE
 THEOREMATIBUS.

I. **V**ulgatissimus MAUPERTUISII Liber *De Nautica Astronomia* Problematum utilitate & praestantia, argumenti novitate, solutionum brevitate & elegantia, ac denique nativa quadam geometrica venustate, quae MAUPERTUISIUM scribentem nunquam destituit, omnium Geometrarum promeruit suffragia. Verum elegantissimus Auctor praejudicata opinione adversus Trigonometriam Sphaericam occupatus ejus usum sibi penitus interdixit, eoque inconsiderantiae processit, ut vix sibi temperaverit quominus illam Geometris, atque ipsis, si diis placet, Astronomis inutilem ac supervacaneam pronunciaret. *Pour résoudre (inquit in operis praefatione) les Problèmes Astronomiques, on a d'ordinaire recours à une Science secondaire: on les réduit à des triangles tracés sur la surface de la Sphère, que cette Science apprend à résoudre. Je parle de la Trigonométrie Sphérique: elle offre d'abord de grandes facilités. On trouve*

ses règles à la tête de plusieurs Livres : & souvent on résout des questions importantes de l'Astronomie par une application aveugle de ces règles. Par elles on est dispensé de pénétrer dans la nature de la question ; & par elles l'Astronome se croiroit dispensé d'être Géomètre , s'il pouvoit méconnoître la Science à la quelle elles doivent leur origine . J'admire l'Art des premiers Géomètres qui nous ont donné la Trigonométrie Sphérique : mais je crois que les Esprits géométriques préféreront , pour les Problèmes d'Astronomie , des solutions immédiates à celles qu'on emprunte d'une autre Science ; & aux quelles on ne parvient qu'en pratiquant des règles dont l'origine n'est guère présente à l'esprit , & dont l'application est souvent ambiguë . J'ai voulu délivrer l'Astronomie du besoin de cette Science secondaire ; & la faire dépendre immédiatement de l'analyse dont toutes les Sciences Mathématiques dépendent . Quasi vero Trigonometriam Sphaericam Analysis excluderet , vel componi cum illa non posset : quasi tam multorum Problematum Astronomicorum analyticae solutiones a Trigonometria Sphaerica non essent depromptae : quasi denique summorum Geometrarum opera , potissimum Astronomica hujus Trigonometriae Dictatis non niterentur . Hinc non immerito MAUPERTUISIUM reprehendit PEZENAS (a) consulte

(a) *Astronomie des Marins*, Pref.

inquiens : *Je ne vois pas trop sur quels principes Mr. MAUPERTUIS nous dit dans sa Préface que la Trigonométrie Sphérique est une Science secondaire dans la résolution des Problèmes Astronomiques. Je soutiens au contraire, que c'est la Science la plus directe; puisque les Problèmes Astronomiques ne sont eux mêmes que des triangles Sphériques, dont on cherche les angles ou les côtés.*

2. Quum itaque ingenii exercendi gratia Astronomiae Nauticae Problemata ad Sphaericam Trigonometriam revocare, eorumque analyticas solutiones ex ejus Trigonometriae principiis derivare aggressus essem, tam ex voto res cessit, ut ex binis tantum simplicissimis Sphaericorum triangulorum proprietatibus utiliora quaeque ac praecipua Nauticae Astronomiae Theoremata praeter spem mihi inferre contingerit adhibitis ad hanc rem speciebus sinuum & cosinuum Eulerianis ad imaginationem & memoriam juvandam aptissimis, ablegatisque symbolis Maupertuisianis valde incommodis & molestis. Binae autem illae triangulorum sphaericorum proprietates, ex quibus Nauticae Astronomiae partem maximam intuli, ad Lemmata duo sequentia referuntur:

LEMMA I.

3. **I**N Triangulo quovis Sphaerico cosinus lateris unius cujuslibet aequatur facto ex sinubus laterum reliquorum ducto in cosinum anguli ab hisce comprehensi, nec non facto ex cosinibus laterum eorundem.

LEMMA II.

4. **I**N Triangulo Sphaerico quocumque sinus angulorum se habent ut sinus laterum oppositorum.

Fig. 1.

5. Sit jam in Triangulo Sphaerico PZS , P Polus, Z Loci Zenit, S Sol vel Astrum quodcumque. Hic ponimus, versari Astrum in Hemisphaerio Poli elevati; levis quippe algebraici signi mutatio ipsum transferet quoties libuerit in Hemisphaerium Poli depressi.

Quamobrem arcus PZ erit complementum latitudinis Loci, arcus ZS complementum altitudinis Astri supra Horizontem, arcus PS complementum ejus declinationis; demum angulus ZPS erit angulus Horarius, & angulus PZS angulus Azimuthalis. Constat

autem, Astronomiam Nauticam fere universam in hisce
quinque niti elementis, Latitudine Loci, Altitudine
Astri supra Horizontem, ejus Declinatione, Angulo Ho-
rario, Angulo Azimuthali.

6. Dicatur igitur.

Loci Latitudo = l

Astri supra Horizontem Altitudo . . = a

Astri Declinatio = d

Angulus Horarius = h

Angulus Azimuthalis = z

Hinc vero colligitur

$$ZPS = h$$

$$PZS = z$$

$$\sin. PZ = \cos. l$$

$$\sin. ZS = \cos. a$$

$$\sin. PS = \cos. d$$

$$\cos. PZ = \sin. l$$

$$\cos. ZS = \sin. a$$

$$\cos. PS = \sin. d$$

7. Ex quinque jam Elementis a, d, h, l, z quinque oriuntur quaterniones, nimirum

I.

a, d, h, l

I I.

a, d, l, z

I I I.

a, d, h, z

I V.

d, h, l, z

V.

a, h, l, z

horumque singuli Theoremata quatuor praebent diversa.

8. Sit igitur quaternio primus.

I.

a, d, h, l

Ex hoc sequentia quatuor Theoremata deducuntur:

THEOREMA I.

$$\S \text{ In. } a = \cos. l \cos. d \cos. h + \sin. l. \sin. d.$$

Dem. Per Lemma I. est $\cos. ZS = \sin. PZ \times \sin. PS \cos. ZPS + \cos. PZ \cos. PS$ Ergo &c. Q.E.D.

THEOREMA II.

$$\cos. h = \frac{\sin. a - \sin. l. \sin. d}{\cos. l \cos. d}.$$

Dem. Liqueat ex simplici reductione formulae Theorematis I. Q.E.D.

THEOREMA III.

9.

$$\sin. l = \frac{\sin. a \sin. d \pm \cos. d \cos. h \sqrt{(\sin.^2 d - \sin.^2 a + \cos.^2 d \cos.^2 h)}}{\sin.^2 d + \cos.^2 d \cos.^2 h}.$$

Dem. In formula primi Theorematis subrogatur $\sqrt{(1 - \sin.^2 l)}$ loco $\cos. l$, & sublata irrationalitate habetur aequatio quadratica, cujus radix est $\sin. l = \&c. Q.E.D.$

THEOREMA IV.

10.

$$\sin. d = \frac{\sin. a \sin. l \pm \cos. l \cos. h \sqrt{(\sin.^2 l - \sin.^2 a + \cos.^2 l \cos.^2 h)}}{\sin.^2 l + \cos.^2 l \cos.^2 h}$$

Dem. Eodem modo ac Theorema III. *Q.E.D.*

11. Sit modo quaternio secundus

I I.

 a, d, l, z

Inde eruuntur Theoremata quatuor sequentia

THEOREMA V.

$$\sin. d = \cos. l \cos. a \cos. z + \sin. l \sin. a.$$

Dem. Par est ratiocinatio ac Theorematis I. *Q. E. D.*

THEOREMA VI.

$$\cos. z = \frac{\sin. d - \sin. l \sin. a}{\cos. l \cos. a}.$$

Dem. Confectarium est Theorematis V. *Q. E. D.*

THEOREMA VII.

$$\sin. l = \frac{\sin. d \sin. a \pm \cos. a \cos. z \sqrt{(\sin.^2 a - \sin.^2 d + \cos.^2 a \cos.^2 z)}}{\sin.^2 a + \cos.^2 a \cos.^2 z}$$

Dem. Facta substitutione quantitatis $\sqrt{(1 - \sin.^2 l)}$ pro $\cos. l$ in formula Theorematis V., sublataque porro asymmetria, oritur aequatio secundi gradus, cujus invenitur radix $\sin. l = \&c.$ *Q. E. D.*

THEOREMA VIII.

$$\sin. a = \frac{\sin. d \sin. l \pm \cos. l \cos. z \sqrt{(\sin.^2 l - \sin.^2 d + \cos.^2 l \cos.^2 z)}}{\sin.^2 l + \cos.^2 l \cos.^2 z}$$

Dem. Eadem quae Theorematis VII. Q.E.D.

14. Sequitur quaternio tertius.

I I I.

a, d, h, z

Et ex hoc Theoremata alia quatuor.

THEOREMA IX.

$$\text{Sin. } z = \frac{\text{sin. } h \cdot \text{cos. } d}{\text{cos. } a}.$$

Dem. Per Lemma II. $\text{sin. } z : \text{sin. } h :: \text{sin. } PS : \text{sin. } ZS ::$
 $\text{cos. } d : \text{cos. } a$. Ergo &c. Q.E.D.

15. THEOREMA X.

$$\text{Sin. } h = \frac{\text{sin. } z \cdot \text{cos. } a}{\text{cos. } d}.$$

Dem. Ex praecedenti. *Q. E. D.*

16.

THEOREMA XI.

$$\text{Cos. } d = \frac{\sin. z \cos. a}{\sin. h}.$$

Dem. Uti prius. *Q. E. D.*

17.

THEOREMA XII.

$$\text{Cos. } a = \frac{\sin. h \cos. d}{\sin. z}.$$

Dem. Ut supra. *Q. E. D.*

18.

Pervenimus nunc ad quartum quaternionem.

I V.

d, h, l, z

unde quatuor alia Theoremata colliguntur.

THEOREMA XIII.

$$\sin. z = \frac{\sin. h. \cos. d.}{\sqrt{(1 - (\cos. l \cos. d. \cos. h + \sin. l \sin. d)^2)}}$$

Dem. In formula Theorematis IX. substituitur pro *cos. a* ejus valor ex Theoremate I. deductus, atque inde oritur $\sin. z = \&c. Q. E. D.$

THEOREMA XIV.

$$\cos. h = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + BC}}{B}, \text{ facto scilicet}$$

$$A = \sin. l \cos. l \sin. d \cos. d \sin.^2 z$$

$$B = \cos.^2 d - \cos.^2 d \cos.^2 l \sin.^2 z$$

$$C = \cos.^2 d + \sin.^2 l \sin.^2 z \sin.^2 d - \sin.^2 z$$

Dem. In formula Theorematis X. pro *sin. h* subrogatur $\sqrt{(1 - \cos.^2 h)}$, & pro *cos. a* valor ipsius ex Theoremate I. Tum sublata irrationalitate nascitur quadratica aequatio, cujus radix est $\cos. h = \&c. Q. E. D.$

20. THEOREMA XV.

$$\cos. d = \sqrt{\left(\frac{D \pm \sqrt{(D^2 - FE)}}{F} \right)}, \text{ assumpto}$$

scilicet

$$D = 2 \sin.^4 \chi \sin.^2 l \cos.^2 l \cos.^2 h + \sin.^4 \chi \cos.^4 l \cos.^2 h \\ + \sin.^2 \chi \sin.^2 h \cos.^2 l - \sin.^4 \chi \sin.^2 l \cos.^2 l$$

$$E = \sin.^4 \chi \cos.^4 l$$

$$F = 4 \sin.^4 \chi \sin.^2 l \cos.^2 l \cos.^2 h$$

$$+ (\sin.^2 h + \sin.^2 \chi \cos.^2 l \cos.^2 h - \sin.^2 \chi \sin.^2 l)^2.$$

Dem. In formula Theorematis XI. pro $\cos. a$ ponitur
ipſius valor ex Theoremate I. eliciendus; tum aufertur
asymmetria, & occurrit factum $\cos. d \sin. d$, hoc est
 $\cos. d \sqrt{(1 - \cos.^2 d)}$: eliminatur iterum asymme-
tria, oriturque tandem aequatio *derivativa* quarti gradus,
cujus radix est $\cos. d = \&c. Q. E. D.$

21. THEOREMA XVI.

$$\sin. l = \frac{\pm \sin. h \cos. h \cos. \chi \cos.^2 d + \sin. d \sqrt{(\sin.^2 \chi - \sin.^2 h \cos.^2 d)}}{\sin. \chi \sin.^2 d + \sin. \chi \cos.^2 d \cos.^2 h}.$$

Dem. In formula Theorematis III. substituitur pro $\sin. a$,
& $\sin.^2 a$ eorum valor ex Theoremate XII. eruendus.
Q. E. D.

22. Sequitur postremo quintus quaternio.

V.

a, h, l, z

& ex hoc alia quatuor Theoremata.

THEOREMA XVII.

$$\sin. h = \frac{\sin. z \cos. a}{\sqrt{1 - (\cos. l \cos. a \cos. z + \sin. l \sin. a)^2}}$$

Dem. In formula Theorematis X. ponitur pro $\cos. d$ ejus
valor ex Theoremate V. eliciendus. Q. E. D.

THEOREMA XVIII.

23.

$$\cos. z = \frac{G \pm \sqrt{(G^2 + HI)}}{H}, \text{ assumpto scilicet}$$

$$G = \sin.l \cos.l \sin.a \cos.a \sin.^2 h$$

$$H = \cos.^2 a - \sin.^2 h \cos.^2 l \cos.^2 a$$

$$I = \sin.^2 h \sin.^2 l \sin.^2 a + \cos.^2 a - \sin.^2 h$$

Dem. Eliminata irrationalitate a formula Theorema-
tis praecedentis, positoque $1 - \cos.^2 z$ pro $\sin.^2 z$ obti-
netur quadratica aequatio, quae radicem habet $\cos. z$
 $= \&c. Q.E.D.$

24. THEOREMA XIX.

$$\cos.a = \sqrt{\left(\frac{K \pm \sqrt{(K^2 - LM)}}{L} \right)}, \text{ assumpto}$$

videlicet

$$K = \cos.^2 l \cos.^2 z \sin.^4 h + \cos.^2 l \sin.^2 z \sin.^2 h \\ - \sin.^2 z \sin.^2 l \cos.^2 l \sin.^4 h$$

$$L = 4 \sin.^2 l \cos.^2 l \cos.^2 z \sin.^4 h \\ + (\sin.^2 z + \cos.^2 z \sin.^2 h \cos.^2 l - \sin.^2 h \sin.^2 l)^2$$

$$M = \sin.^4 h \cos.^4 l$$

Dem. Tollitur asymmetria in formula Theorematis XVII., tum substituitur $\sqrt{1 - \cos.^2 a}$ loco $\sin. a$, ac tollitur iterum asymmetria. Inde oritur aequatio *derivativa* quarti gradus, cujus radix praebet $\cos. a = \&c. Q.E.D.$

THEOREMA XX.

25.

$$\sin. l = \frac{1}{P} \sqrt{N \pm \sqrt{N^2 - P^2 Q^2}}, \text{ po-}$$

sito nimirum

$$\begin{aligned} N &= 2 \sin.^2 a \cos.^2 a \cos.^2 \gamma \sin.^4 h \\ &- (\sin.^2 h \sin.^2 a - \sin.^2 h \cos.^2 \gamma \cos.^2 a) \times \\ &(\sin.^2 \gamma \cos.^2 a + \sin.^2 h \cos.^2 \gamma \cos.^2 a - \sin.^2 h) \\ P &= \sin.^2 h \sin.^2 a + \sin.^2 h \cos.^2 \gamma \cos.^2 a \\ Q &= \sin.^2 \gamma \cos.^2 a + \sin.^2 h \cos.^2 \gamma \cos.^2 a - \sin.^2 h. \end{aligned}$$

Dem. A formula Theorematis XVII. eliminatur irrationalitas, deinde loco $\cos. l$ subrogatur ejus valor $\sqrt{1 - \sin.^2 l}$, ac rursus tollitur irrationalitas. Hoc facto prodit aequatio *derivativa* quarti gradus, hujus-

que radix dat $\sin. l = \&c. Q.E.D.$

26. Evolutis Theorematis omnibus, quae ex varia quinque elementorum a, d, h, l, z combinatione derivantur, duodecim alia possunt ex praecedentibus colligi, eaque longe simpliciora ac fortassis utiliora, si ponamus versari Astrum in Horizonte; seu nullam esse ipsius altitudinem, qua in hypothese horarius angulus h tempus indicat ab Astro infumptum in ascensu ab Horizonte ad Meridianum, diciturque iccirco arcus femidiurnus, magni apud Astronomos usus. Denotante jam igitur h arcum hujusmodi femidiurnum, factaque $a = 0$, ex praecedentibus quaternionibus quatuor isti

$$a, d, h, l$$

$$a, d, l, z$$

$$a, d, h, z$$

$$a, h, l, z$$

degenerant in terniones

I.

 d, h, l

II.

 d, l, z

III.

 d, h, z

IV.

 h, l, z

Quorum singuli tria praebent Theoremata. Sit igitur
ternio primus.

I.

 d, h, l

Ex hoc tria sequentia Theoremata derivantur.

THEOREMA XXIX. &c.

THEOREMA XXI.

$$\text{Cos. } h = - \text{tang. } l \text{ tang. } d.$$

Dem. In hac hypothesi formula Theorematis I. mutatur in $\text{cos. } l \text{ cos. } d \text{ cos. } h + \text{sin. } l \text{ sin. } d = 0$. Hinc fit

$$\text{cos. } h = - \frac{\text{sin. } l \text{ sin. } d}{\text{cos. } l \text{ cos. } d} = - \text{tang. } l \text{ tang. } d. \text{ Q. E. D.}$$

THEOREMA XXII.

27.

$$\text{Tang. } l = - \frac{\text{cos. } h}{\text{tang. } d}.$$

Dem. Patet ex praecedenti. Q. E. D.

THEOREMA XXIII.

28.

$$\text{Tang. } d = - \frac{\text{cos. } h}{\text{tang. } l}.$$

Dem. Eadem. *Q.E.D.*

29. Sequitur ternio secundus.

I I.

d, l, z

Huic respondent tria isthaec Theoremata:

THEOREMATA XXIV.

$$\text{Cos. } z = \frac{\sin. d}{\cos. l}.$$

Dem. Formula Theorematis VI. in hanc mutatur, facto $\sin. a = 0$, & $\cos. a = 1$. *Q.E.D.*

THEOREMA XXV.

$$\sin. d = \cos. l \cos. z$$

Dem. liquet ex praecedenti. *Q.E.D.*

31. THEOREMA XXVI.

$$\cos. l = \frac{\sin. d}{\cos. z}.$$

Dem. Eadem. Q.E.D.

32.

Ternio tertius

I I I.

d, h, z

tria haec parit Theoremata:

THEOREMA XXVII.

$$\sin. z = \sin. h \cos. d.$$

Dem. Patet ex formula Theorematis IX. Q.E.D.

K

33. THEOREMA XXVIII.

$$\sin. h = \frac{\sin. z}{\cos. d}.$$

Dem. Ex praecedenti. Q. E. D.

34. THEOREMA XXIX.

$$\cos. d = \frac{\sin. z}{\sin. h}.$$

Dem. Ut supra. Q. E. D.

35. Denique ex Ternione quarto

I V.

h, l, z

alia haec tria deducuntur Theoremata:

THEOREMA XXX.

$$\text{Tang. } h = \frac{\text{tang. } \zeta}{\sin. l}.$$

Dem. Ex transformatione formulae Theorematis XVII.

oritur

$$\sin. h = \frac{\sin. \zeta}{\sqrt{(1 - \cos.^2 l \cos.^2 \zeta)}}. \text{ Ergo \&c. } Q.E.D.$$

THEOREMA XXXI.

36.

$$\sin. l = \frac{\text{tang. } \zeta}{\text{tang. } h}.$$

Dem. Patet ex reductione formulae praecedentis. *Q.E.D.*

37.

THEOREMA XXXII.

$$\text{Tang. } z = \sin. l \text{ tang. } h.$$

Dem. Liqueat ex praecedenti. Q. E. D.



DISQUISITIO VII.

DE COMETARUM MOTU.

1. **P**ostquam diurnae Parallaxeos defectus, vel minima prorsus magnitudo Cometas extulit supra regiones sublunares, annua vero Parallaxis ostendit eorundem in regiones Planetarum descensum, illud statim ex Newtonianae Philosophiae dictatis occurrit & communi Astronomorum suffragio firmatum est, Cometas omnes Planetarum instar ferri in orbibus ellipticis circa Solem in communi orbium umbilico positum, urgentemque momentis singulis Planetas omnes & Cometas praepotenti attractionis vi, quae in ratione duplicata reciproca distantiarum a Sole augeatur. Verum ea intercedit inter orbis Planetarum & Cometarum dissimilitudo, ut illi ellipses quidem sint, sed ad circulos proxime accedant, isti vero ellipses sint acutissimae ac multum excentricae, habentes nimirum conjugatorum axium alterum longissimum, alterum brevissimum. Discrimen hoc a projectionis velocitate proficisci docet Newtoniana Philosophia: quum enim ad descriptionem circuli ea postuletur projectionis velocitas,

quae requiritur ut corpus ad duplam altitudinem seu distantiam a centro possit ascendere, & ad descriptionem ellipseos opus sit, ut projectionis velocitas in quavis altitudine se habeat ad velocitatem in circulo in eadem altitudine in minori ratione quam radix binarii ad unitatem, ad describendam vero parabolam celeritatem projectionis in quavis altitudine talem esse oporteat, quae ad celeritatem in circulo in eadem altitudine rationem habeat omnino eandem quam binarii radix ad unitatem; inde consequitur, Planetas ab initio projectos fuisse impetu parum ab illo diverso quocum ad duplam altitudinem potuissent pervenire, Cometas vero eam accepisse projectilem celeritatem, quae ad celeritatem in circulo in pari altitudine rationem habeat vix minorem, quam radix numeri binarii ad unitatem. Quo fane factum est, ut elliptici Planetarum orbes ferme circulares evaderent, orbesque Cometarum in Solis vicinia vix a parabolicis differrent. Quum itaque Cometae cujuslibet semita saltem prope Solem, siue apsidem imam sit ad sensum parabolica, commodissima hinc patuit Astronomis via in Cometarum motibus supputandis, ut scilicet neglecta ellipsi, quae ob inextricabiles calculos non aliter esset quam herculeo labore tractabilis, parabolam excolerent, cujus tetragonismus jam inde ab Archimedis aetate Geometris

perspectus & obvius Cometarum loca ad tempus datum labore non ita immani, nec prorsus ingrato suppeditat.

2. Jam vero in definiendis Cometae elementis illud occurrit praecipuum, ut cognito angulo, quem rectae a duobus Cometae locis ad centrum Solis ductae comprehendunt, cognitaque earundem rectarum, seu radiorum vectorum magnitudine quamproxime, inveniatur distantia Cometae perihelia, hoc est distantia foci a parabolae vertice, nec non positio axis, ipsaque iccirco parabola delineari possit, & graphice repraesentari. Ad hoc praestandum expedita mihi se obtulit methodus, quae cum differat ab aliis, & simplicitate atque elegantia se commendet, aequiorum Geometrarum non detrectat iudicium.

3. Sit itaque CPM orbis parabolici pars in Solis vicinia, & ex binis Cometae locis C , M jungantur ad Solis centrum S in orbis umbilico constitutum radii vectores CS , SM datum angulum CSM comprehendentes, notaque praeterea sit radiorum CS , SM magnitudo saltem vero proxima: quaeritur distantia perihelia SP , & positio axis QP . Fiat

Fig. 5.

$$CS = a,$$

$$MS = b,$$

$$SP = p,$$

$$\text{angulus } CSM = \varphi,$$

$$CSP = x,$$

$$PSM = \varphi - x.$$

Ductis ordinatis CD , ME habetur $SE = b \cos.(\varphi - x)$,
 $SD = a \cos. x$, $ME^2 = 4p$. $PE = 4p$. ($SP - SE$)
 $= 4p^2 - 4pb \cos.(\varphi - x)$, $CD^2 = 4p$. $DP = 4p$.
 $(SP - SD) = 4p^2 - 4pa \cos. x$. Igitur $SM^2 = b^2$
 $= 4p^2 - 4pb \cos.(\varphi - x) + b^2 \cos.^2(\varphi - x)$, &
 $SC^2 = a^2 = 4p^2 - 4pa \cos. x + a^2 \cos.^2 x$;educta-
 que radice prodibit $b = 2p - b \cos.(\varphi - x)$, $a = 2p$
 $- a \cos. x$. Dempa harum aequationum prima ab al-
 tera oritur $b \cos.(\varphi - x) - a \cos. x = a - b$, hoc est
 $(b \cos. \varphi - a) \cos. x + b \sin. \varphi \sin. x = a - b$, vel
 $(b \cos. \varphi - a) \cos. x + b - a = -b \sin. \varphi \sqrt{1 - \cos.^2 x}$,
 & quadrando $(b \cos. \varphi - a)^2 \cos.^2 x + 2(b - a) \times$
 $(b \cos. \varphi - a) \cos. x + (b - a)^2 = b^2 \sin.^2 \varphi$
 $- b^2 \sin.^2 \varphi \cos.^2 x$, & factis reductionibus, expurga-
 taque de more aequatione invenitur $\cos.^2 x$

$$+ \frac{2(b-a)(b \cos. \varphi - a) \cos. x}{b^2 - 2ab \cos. \varphi + a^2} + \frac{b^2 \cos.^2 \varphi - 2ab + a^2}{b^2 - 2ab \cos. \varphi + a^2} = 0.$$

$$\text{Igitur } \cos. x = \frac{(a-b)(b \cos. \varphi - a)}{b^2 - 2ab \cos. \varphi + a^2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{B^2} - \frac{C}{B}\right)},$$

facta scilicet

$$A = (a-b)(b \cos. \varphi - a),$$

$$B = b^2 - 2ab \cos. \varphi + a^2, \text{ \&}$$

$$C = b^2 \cos.^2 \varphi - 2ab + a^2.$$

φ		$= 87^\circ$
$\log. b$		$= 0, 6711080$
$\log. a$		$= 0, 6592885$
$\log. \cos. \varphi$		$= 8, 7188002$
$\log. b \cos. \varphi$		$= 9, 3899082$
$b \cos. \varphi$		$= 0, 2454$
$b. \cos. \varphi - a$		$= -4, 3180$
$\log. -(b \cos. \varphi - a)$		$= 0, 6352826$
$\log. -(a - b)$		$= 9, 1000257$
$\log. (a - b) (b \cos. \varphi - a)$		$= 9, 7353083$
$(a - b) (b \cos. \varphi - a)$		$= 0, 5436$
$\log. \sin. \varphi$		$= 9, 9994044$
$\log. \sin.^2 \varphi$		$= 9, 9988088$
$\log. \cos. \varphi$		$= 8, 7188002$
$\log. \cos. \varphi \sin.^2 \varphi$		$= 8, 7176090$
$\cos. \varphi \sin.^2 \varphi$		$= 0, 05219$
$\log. \cos.^2 \varphi$		$= 7, 4376004$
$\cos.^2 \varphi$		$= 0, 002739$
$\cos. \varphi \sin.^2 \varphi + \cos.^2 \varphi$		$= 0, 05493$

$$1 - \cos. \varphi \sin.^2 \varphi - \cos.^2 \varphi \quad . \quad . \quad = 0, 94507$$

$$\log. 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0, 3010300$$

$$\log. a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0, 6592885$$

$$\log. b^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 2, 0133240$$

$$\log. 2ab^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 2, 9736425$$

$$\log. (1 - \cos. \varphi \sin.^2 \varphi - \cos.^2 \varphi) = 9, 9754640$$

$$\log. 2ab^1 (1 - \cos. \varphi \sin.^2 \varphi - \cos.^2 \varphi) = 2, 9491065$$

$$\log. \sqrt{2ab^1 (1 - \cos. \varphi \sin.^2 \varphi - \cos.^2 \varphi)} = 1, 4745532$$

$$\sqrt{2ab^1 (1 - \cos. \varphi \sin.^2 \varphi - \cos.^2 \varphi)} = 29, 82$$

$$(a - b) (b \cos. \varphi - a) + \sqrt{[2ab^1 \times (1 - \cos. \varphi \sin.^2 \varphi - \cos.^2 \varphi)]} \quad . \quad . \quad = 30, 3636$$

$$(a - b) (b \cos. \varphi - a) - \sqrt{[2ab^1 \times (1 - \cos. \varphi \sin.^2 \varphi - \cos.^2 \varphi)]} \quad . \quad . \quad = -29, 2764$$

$$\log. [(a - b) (b \cos. \varphi - a) + \sqrt{[2ab^1 \times (1 - \cos. \varphi \sin.^2 \varphi - \cos.^2 \varphi)]}] \quad . \quad = 1, 4823590$$

$$\log. b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 1, 3422160$$

$$\log. a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 1, 3185770$$

$$b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 21, 99$$

$$a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 20, 82$$

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 & \dots \dots \dots = 42, 81 \\
 \log. b \cos. \varphi & \dots \dots \dots = 9, 3899082 \\
 \log. a & \dots \dots \dots = 0, 6592885 \\
 \log. 2 & \dots \dots \dots = 0, 3010300 \\
 \log. 2ab \cos. \varphi & \dots \dots \dots = 0, 3502267 \\
 2ab \cos. \varphi & \dots \dots \dots = 2, 24 \\
 a^2 + b^2 - 2ab \cos. \varphi & \dots \dots \dots = 40, 57 \\
 \log. (a^2 + b^2 - 2ab \cos. \varphi) & \dots \dots \dots = 1, 6082050 \\
 \log. \frac{(a-b)(b \cos. \varphi - a) + \sqrt{2ab^3(1 - \cos. \varphi \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}}{(a^2 + b^2 - 2ab \cos. \varphi)} & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

$$= \dots \dots \dots = 9, 8741540$$

Igitur angulus x , seu $CSP = 41^\circ 32' 42''$, & $PSM = 45^\circ 27' 18''$.

5. Inventis porro angulis x , & $\varphi - x$, hoc est veris Cometæ anomaliis, statim invenitur distantia Cometæ perihelia p , seu PS ex formula $p = \frac{1}{2} a \times (1 + \cos. x)$:

$$\begin{aligned}
 \cos. x & \dots \dots \dots 0, 7484351 \\
 \cos. x + 1 & \dots \dots \dots 1, 7484351 \\
 \log. (\cos. x + 1) & \dots \dots \dots 0, 2426495 \\
 \log. \frac{1}{2} a & \dots \dots \dots 0, 3582585
 \end{aligned}$$

$$\log. \frac{1}{2} a (\cos. x + 1) \dots\dots\dots 0, 6009080$$

$$\frac{1}{2} a (\cos. x + 1) \dots\dots\dots 3, 9894$$

Est ergo distantia perihelia quaesita 3, 9894, hoc est fere quadrupla distantiae Telluris a Sole.

6. Si in expressionem $\cos. x$ §. 3. introducatur finus versus anguli φ , nimirum $\text{ver. } \varphi$, ea valde contrahitur, ac formam simpliciore adipiscitur: quum

$$\text{enim sit } 1 - \cos. \varphi \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi = 1 - \cos. \varphi + \cos^2 \varphi$$

$$- \cos^2 \varphi = 1 - \cos. \varphi - \cos^2 \varphi (1 - \cos. \varphi)$$

$$= \text{ver. } \varphi - \text{ver. } \varphi \cos^2 \varphi = \text{ver. } \varphi \sin^2 \varphi, \text{ fit ideo}$$

$$\cos. x = \frac{(a-b)(b \cos. \varphi - a) \pm \sqrt{2ab^3(1 - \cos. \varphi \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}}{b^2 - 2ab \cos. \varphi + a^2}$$

$$= \frac{(a-b)(b \cos. \varphi - a) \pm b \sin. \varphi \sqrt{2ab \text{ver. } \varphi}}{b^2 - 2ab \cos. \varphi + a^2}$$

7. Detegitur eodem artificio distantia perihelia p

$$= \frac{a(ab + b^2) \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \pm \frac{1}{2} ab \sin. \varphi \sqrt{2ab \text{ver. } \varphi}}{b^2 - 2ab \cos. \varphi + a^2}, \text{ quae}$$

supputari haud moleste potest etiam ante initam supputationem anguli x . Fit nempe

$$\log. a \dots\dots\dots 0, 6592885$$

$$\log. b \dots\dots\dots 0, 6711080$$

$$\log. ab \dots\dots\dots 1, 3303965$$

ab	21, 3991
$\log. b^2$	1, 3422160
b^2	21, 98953
$ab + b^2$	43, 38863
$\log. (ab + b^2)$	1, 6373759
$\log. \sin. \frac{1}{2} \phi$	9, 8378122
$\log. \sin^2 \frac{1}{2} \phi$	9, 6756244
$\log. a (ab + b^2) \sin^2 \frac{1}{2} \phi$	1, 9722888
$a (ab + b^2) \sin^2 \frac{1}{2} \phi$	93, 8185
$\log. 2a$	0, 9603185
$\log. b$	0, 6711080
$\log. \text{ver. } \phi$	9, 9766544
$\log. 2ab \text{ ver. } \phi$	1, 6080809
$\log. \sqrt{2ab} \text{ ver. } \phi$	0, 8040404
$\log. \sin. \phi$	9, 9994044
$\log. \frac{1}{2} ab$	1, 0293665
$\log. \frac{1}{2} ab \sin. \phi \sqrt{2ab} \text{ ver. } \phi$	1, 8328113
$\frac{1}{2} ab \sin. \phi \sqrt{2ab} \text{ ver. } \phi$	68, 0473
$a(ab + b^2) \sin^2 \frac{1}{2} \phi + \frac{1}{2} ab \sin. \phi \sqrt{2ab} \text{ ver. } \phi$	161, 8658

$$\log. (a(ab + b^2) \sin^2 \frac{1}{2} \phi + \frac{1}{2} ab \sin. \phi \times \\ \sqrt{2ab \text{ ver. } \phi}) \dots \dots \dots 2, 2091550$$

$$\log. (a^2 + b^2 - 2ab \cos. \phi) \dots \dots \dots 1, 6082050$$

$$\log. \frac{a \sin^2 \frac{1}{2} \phi (ab + b^2) + \frac{1}{2} ab \sin. \phi \sqrt{2ab \text{ ver. } \phi}}{(a^2 + b^2 - 2ab \cos. \phi)}$$

$$= \dots \dots \dots 0, 6009500$$

Igitur $p = 3, 9898$, quod non differt nisi $0, 0004$ a praecedenti.

8. Definitis jam verarum anomaliarum angulis & distantia Cometae perihelia, haud difficulter defini-
ri poterit tempus, quod in percurrendo arcu MC a da-
tis radiis vectoribus MS , SC comprehenso Cometa ab-
sumit. Fiat enimvero anomalia vera $CSP = \lambda$, altera
 $PSM = \omega$. Hinc nanciscimur

$$CD = a \sin. \lambda \quad ME = b \sin. \omega$$

$$SD = a \cos. \lambda \quad SE = b \cos. \omega$$

$$PD = \frac{a^2 \sin^2 \lambda}{4p} \quad PE = \frac{b^2 \sin^2 \omega}{4p}$$

$$\text{Est autem Spatium Parabolicum } PME = \frac{b^3 \sin^3 \omega}{6p},$$

$$\& CPD = \frac{a^3 \sin^3 \lambda}{6p} : \text{ rursus triangulum } SEM$$

$$= \frac{b^2 \sin. \omega \cos. \omega}{2}, \text{ \& triangulum } CSD = \frac{a^2 \sin. \lambda \cos. \lambda}{2}.$$

Igitur erit Sector Parabolicus *CPMS*

$$= \frac{a^3 \sin.^3 \lambda + 3p a^2 \sin. \lambda \cos. \lambda + b^3 \sin.^3 \omega + 3p b^2 \sin. \omega \cos. \omega}{6p}$$

9. Constat jam ex celeberrima Kepleriana Lege, tempora quibus diversi Planetæ vel Cometæ arcus quoslibet orbitarum suarum percurrunt rationem sequi simplicem directam arearum ab ipsis arcubus & binis radiis vectoribus interceptarum, & subduplicatam inversam parametrorum; itaque si dicatur *T* tempus periodicum Terræ, unius nempe anni sideræi, *A* area totius orbitæ terrestris, *h* ejus parameter, *t* vero tempus, quo Cometa describit arcum *MC*, habebitur hæc analogia

$$\frac{A}{\sqrt{h}} : \frac{a^3 \sin.^3 \lambda + 3p a^2 \sin. \lambda \cos. \lambda + b^3 \sin.^3 \omega + 3p b^2 \sin. \omega \cos. \omega}{12 \sqrt{p}} ::$$

T : *t*. Quare fit *t*

$$= \frac{T(a^3 \sin.^3 \lambda + 3p a^2 \sin. \lambda \cos. \lambda + b^3 \sin.^3 \omega + 3p b^2 \sin. \omega \cos. \omega)}{12 A \sqrt{p}} \times$$

$\sqrt{h}$. Invenitur porro area *A* orbitæ terrestris ex nota ratione, quam habet ad aream circuli femiaxe transverso orbitæ tanquam radio descripti, quæ scilicet

eadem est ac ratio femiaxis conjugati ad femiarem transversum. Quum enim femiarem ellipsis terrestris transversum, seu distantiam terrae mediocrem a Sole §. 4. unitati aequalem sumpserimus, denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam oritur circuli radio 1 descripti area $= \pi$; quamobrem ob $\sqrt{\frac{1}{2} h} = \text{femiaxi conjugato orbitae terrestris prodit } 1 : \sqrt{\frac{1}{2} h} :: \pi : A$, hoc est $A = \pi \sqrt{\frac{1}{2} h}$. Inde postremo consequitur

$$= \frac{T(a^3 \sin^3 \lambda + 3pa^2 \sin \lambda \cos \lambda + b^3 \sin^3 \omega + 3pb^2 \sin \omega \cos \omega)}{12\pi \sqrt{\frac{1}{2} p^3}}$$

10. Jamvero exploratum est, tempus periodicum Terrae ad Fixas relatum completi $365^d. 6^h. 9^m. 11^s$, nimirum dies 365, 2563773; itaque calculus instituetur hoc pacto

<i>log. a</i>		0, 6592885
<i>log. sin. λ</i>		9, 8216498
<i>log. a³</i>		1, 9778655
<i>log. sin³ λ</i>		9, 4649494
<i>log. a³ sin³ λ</i>		1, 4428149
<i>a³ sin³ λ</i>		27, 72138
<i>log. 3</i>		0, 4771213
<i>log. p</i>		0, 6009500

L

$\log. a^2$		1, 3185770
$\log. \sin. \lambda$		9, 8216498
$\log. \cos. \lambda$		9, 8741541
$\log. 3pa^2 \sin. \lambda \cos. \lambda$	:	2, 0924522
$3pa^2 \sin. \lambda \cos. \lambda$		123, 7235
$\log. b$		0, 6711080
$\log. \sin. \omega$		9, 8529066
$\log. b^3$		2, 0133240
$\log. \sin^3 \omega$		9, 5587198
$\log. b^3 \sin^3 \omega$		1, 5720438
$b^3 \sin^3 \omega$		37, 32878
$\log. 3$		0, 4771213
$\log. p$	. :	0, 6009500
$\log. b^2$		1, 3422160
$\log. \sin. \omega$		9, 8529066
$\log. \cos. \omega$		9, 8460086
$\log. 3p b^2 \sin. \omega \cos. \omega$		2, 1192025
$3p b^2 \sin. \omega \cos. \omega$		131, 5838
$a^3 \sin^3 x + 3pa^2 \sin. \lambda \cos. \lambda + b^3 \sin^3 \omega$		
$+ 3pb^2 \sin. \omega \cos. \omega = P$		
		320, 35746

$\log. P$		2, 5056348
$\log. T$		2, 5625978
$\log. TP$		5, 0682326
$\log. p$		0, 6009500
$\log. p^3$		1, 8028500
$\log. 72$		1, 8573325
$\log. 72 p^3$		3, 6601825
$\log. \sqrt{72 p^3}$		1, 8300912
$\log. \pi$		0, 4971499
$\log. \pi \sqrt{72 p^3}$		2, 3272411
$\log. \frac{TP}{\pi \sqrt{72 p^3}}$		2, 7409915
$\frac{TP}{\pi \sqrt{72 p^3}}$		550, 79683

Igitur Cometa in percurrento arcu *MPC* tempus absumit dierum quingentorum quinquaginta, horarum undeviginti..

II. Sagacissimus Geometra LAMBERTUS, cujus immaturam mortem, dum haec scribo, mihi nuntiatam nunquam fatis Disciplinae Mathematicae lugebunt, in eximio Opusculo de *Insignioribus Orbitae Cometarum*

Proprietatibus, quo nihil legi potest elegantius, nihil ingeniosius, Problemate XV. inveniendum sibi proponit tempus, quo Cometa describit arcum *MPC* data summa radiorum vectorum *SC*, *SM* una cum chorda arcum *MPC* subtendente: facta vero eadem chorda $= k$ expressionem temporis nanciscitur simplicitate & elegantia prope admirabilem, scilicet

$$T = \frac{\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3^m \sqrt{2}}, \text{ in qua valor}$$

litterae *m* Lamberto est $\frac{1}{116,2648}$. Ut formulam hanc

in exemplo praecedenti experiamur, ejusque confensum cum formula nostra ostendamus, investigetur prius valor chordae *k*, quae nimirum ex Geometria invenitur $= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos. \phi}$, hoc est §. 4. $k = \sqrt{40,57} = 6,36946$. Fiet igitur

<i>a</i>	• • • • •	4,5634
<i>b</i>	• • • • •	4,6893
<i>k</i>	• • • • •	6,36946
$a + b + k$	• • • • •	15,62216
$\frac{a + b + k}{2}$	• • • • •	7,81108

$$\log. \frac{a+b+k}{2} \dots \dots \dots 0, 8927110$$

$$\log. \left(\frac{a+b+k}{2} \right)^3 \dots \dots \dots 2, 6781330$$

$$\log. \left(\frac{a+b+k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \dots \dots \dots 1, 3390665$$

$$\left(\frac{a+b+k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \dots \dots \dots 21, 83065$$

$$a+b \dots \dots \dots 9, 2527$$

$$-k \dots \dots \dots -6, 36946$$

$$a+b-k \dots \dots \dots 2, 88324$$

$$\frac{a+b-k}{2} \dots \dots \dots 1, 44162$$

$$\log. \frac{a+b-k}{2} \dots \dots \dots 0, 1588508$$

$$\log. \left(\frac{a+b-k}{2} \right)^3 \dots \dots \dots 0, 4765524$$

$$\log. \left(\frac{a+b-k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \dots \dots \dots 0, 2382762$$

$$\left(\frac{a+b-k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \dots \dots \dots 1, 73092$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{a+b+k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \dots\dots 20, 09973 \\
 & \log. \left(\left(\frac{a+b+k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \dots 1, 3031903 \\
 & \log. \frac{1}{m} \dots\dots\dots 2, 0654481 \\
 & \log. \frac{1}{m} \left(\left(\frac{a+b+k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \dots 3, 3686384 \\
 & \log. 2 \dots\dots\dots 0, 3010300 \\
 & \log. \sqrt{2} \dots\dots\dots 0, 1505150 \\
 & \log. 3 \dots\dots\dots 0, 4771213 \\
 & \log. 3 \sqrt{2} \dots\dots\dots 0, 6276363 \\
 & \log. \frac{1}{m} \frac{\left(\left(\frac{a+b+k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right)}{3\sqrt{2}} \dots 2, 7410021
 \end{aligned}$$

Quare oritur $T = 550, 8104$, quod ne semihora quidem differt a tempore ex formula nostra prodeunte.

12. Si tempus quaeratur totius revolutionis Cometae per orbem suum, tempus scilicet periodicum, illud nequaquam potest per parabolam determinari: quandoquidem observationes illae, quae in Cometa prope Solem versante nobisque conspicuo possunt institui, ideo periodicum Cometae tempus exhiberent quod ex

illis majoris Ellipseos axis longitudo colligeretur. Id vero nequit, ut per se liquet, per parabolam obtineri. Res autem esset infiniti prope operis immensique laboris, Cometae orbem tamquam Ellipsim, qualis revera est, spectare, ejus Ellipsis formam ex observationibus definire, atque porro ex nota distantia umbilici a proximo vertice axis majoris longitudinem deducere. Praeterea tam immanis labor incassum magna ex parte susciperetur parumque admodum accuratationis inde sperare fas esset, siquidem vel minimus in observando, isque inevitabilis admissus error Elliptici orbis formam, indeque conclusam axis majoris mensuram maximopere immutat. Quum enim, ut notum est, minima sufficiat variatio ad hoc, ut Ellipsis in Parabolam convertatur, & Ellipseos axis infinitam longitudinem adipiscatur; propterea aberratio multo adhuc minor poterit axem ipsum si non infinite, plurimum certe protrudere vel contrahere.

13. Itaque longe consultius erit ex orbis parabolici positione, ex parametri longitudine, ex minima Cometae a Sole distantia Cometam unum ab altero internoscere, ita ut si bini Cometarum orbis in hisce notis & characteribus secum invicem undequaque consentiant, ac parva, si quae occurrit, discrepantia vel observationibus non omnimode accuratis, vel mutatio-

nibus in Cometae cursu incidentibus adscribi jure possit, orbes ipsi specie tenus diversi pro uno eodemque habendi sint, in quo unicus Cometa revolvatur. Si praeterea tempora etiam, post quorum lapsum Cometa ad perihelium regreditur, inveniantur aequalia, nulla fane supererit de Cometae identitate incertitudo aut haesitatio, simulque tempus ipsius periodicum tuto inde certissimeque colligetur.

14. Talis orbium congruentia detecta potissimum fuit in Cometa, qui anno 1456. die 9. Junii, anno 1531. die 28. Februarii, anno 1607. die 26. Octobris, & anno 1682. die 14. Septembris ad Solem maxime appropinquavit. Tempus inter binas proximas hujus Cometae apparitiones elapsum complectitur annos circiter $75\frac{1}{2}$. Quapropter ejus Cometae reditus jure merito expectabatur anno 1759., quemadmodum reipsa contigit, quum die 13. Martii ipse perihelium attigerit. Sed de hujus Cometae motu, periodo, perturbatione incredibili ingenii sagacitate & industria egit summus Geometra CLAIRAUT, qui eximio edito opere *Théorie du Mouvement des Cometes* immensi exantlato calculorum labore omnes illius Cometae perturbationes, indeque ortam periodici temporis protractionem definivit.

15. Ex noto istius Cometae tempore periodico T inveniri facile potest media ipsius a Sole distantia D ,

feu femiaxis major Ellipseos per exploratissimam Astronomiae legem, juxta quam periodica Planetarum tempora rationem sequuntur sesquiplicatam mediarum a Sole distantiarum. Si enim tum femiaxis major terrestris orbitae, tum periodicum telluris tempus unitatis loco accipiantur, prodibit aequalitas $D = T^{\frac{2}{3}}$. Hinc igitur erit

$$T \quad = 75\frac{1}{2} \text{ annis}$$

$$\log. T \quad = 1, 8779469$$

$$\log. T^{\frac{2}{3}} \quad = 1, 2519646$$

proindeque $T^{\frac{2}{3}} = D = 17, 8634$, nimirum media Telluris a Sole distantia se habet ad distantiam Cometae mediam a Sole uti 10000 ad 178634. Quoniam vero distantia hujus Cometae perihelia, seu minima fumitur $= 0, 583$, hac dempta a mediocri 17, 8634 relinquitur Cometae excentricitas $= 17, 2804$. Addita porro excentricitate femiaxi Ellipseos majori oritur distantia Cometae maxima seu aphelia $= 35, 1438$. Inventa jam excentricitate e , & femiaxe majore D elicitur femiaxis minor δ ex nota aequatione $\delta = \sqrt{(D^2 - e^2)}$ hunc in modum

$$\log. e \dots \dots \dots = 1, 2375538$$

$$\log. e^2 \dots \dots \dots = 2, 4751076$$

$$e^2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = 298,612$$

$$\log. D \dots \dots \dots = 1, 2519646$$

$$\log. D^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 2, 5039292$$

$$D^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 319, 102$$

$$D^2 - e^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 20,490$$

$$\log. (D^2 - e^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 1, 3115420$$

$$\log. \sqrt{D^2 - e^2} \dots = 0,6557710$$

Fit itaque semiaxis minor $= 4,5266$. Hisce porro quantitibus exploratis & cognitis primum erit expeditumque Cometae orbitam graphice delineare.

16. In Actis Lipsiensibus nuper propositum fuit demonstratione suppressa Theorema elegantissimum hisce verbis conceptum : *Data distantia Cometae a Sole $SM = v$, una cum angulo $SMN = \psi$, quem ea cum tangente facit orbitae parabolicae, erit tempus quo ex M ad perihelium pertingit $= (\cos. \psi - \frac{2}{3} \cos. \psi^3) v \sqrt{2 v}$, quod tempus exprimitur per arcum circuli radio $= 1$ descripti, qui metitur motum medium Solis pro eodem temporis intervallo . Quum hujus pulcherrimi Theorematis*

demonstrationem quam fieri potest simplicissimam identidem animo volutarem, eandem demum sic assequutus sum:

Dem: Posito angulo PSM , sive anomalia vera $= \varphi$, perspicuum est, sectoris parabolici PMS elementum esse $\frac{1}{2} v^2 d\varphi$; quum autem in Parabola angulus SMN aequetur angulo SNM , fiet iccirco $\varphi = 180^\circ - 2\psi$, & $d\varphi = -2d\psi$; proindeque $\frac{1}{2} v^2 d\varphi = -v^2 d\psi$.

Igitur sector parabolicus $PMS = -\int v^2 d\psi$. Jam-

vero constat ex Conicis, parabolae parametrum p aequalem esse quadruplo radio vectori ducto in quadratum sinus anguli SMN , videlicet $p = 4v \sin.\psi^2$, & con-

sequenter $v^2 = \frac{p^2}{16 \sin.\psi^4}$: ergo $PMS = -\frac{p^2}{16} \int \frac{d\psi}{\sin.\psi^4}$.

Est autem, ut ex Calculo Integrali notum est, $\int \frac{d\psi}{\sin.\psi^4}$

$= -\frac{\cos.\psi}{3 \sin.\psi^3} - \frac{2 \cos.\psi}{3 \sin.\psi}$: quapropter PMS

$= \frac{p^2}{16} \left(\frac{\cos.\psi}{3 \sin.\psi^3} + \frac{2 \cos.\psi}{3 \sin.\psi} \right) = v^2 \left(\frac{1}{3} \cos.\psi \sin.\psi \right.$

$\left. + \frac{2}{3} \cos.\psi \sin.\psi^3 \right)$, sine ulla Constantis additione quia

evanescit Sector ubi $\psi = 90^\circ$. Constat porro ex Mechanicis, tempus, quo Cometes describit arcum MP , aequari duplae areae MPS divisae per radicem semi-

parametri: hinc erit quaesitum tempus $= \frac{2 v^2}{\sqrt{\frac{1}{2}p}} \times$

$(\frac{1}{3} \cos. \psi \sin. \psi + \frac{2}{3} \cos. \psi \sin. \psi^3) = \frac{2 v^2}{\sqrt{2 v \sin. \psi^2}} \times$

$(\frac{1}{3} \cos. \psi \sin. \psi + \frac{2}{3} \cos. \psi \sin. \psi^3) = (\frac{1}{3} \cos. \psi + \frac{2}{3} \cos. \psi \sin. \psi^2) \times$
 $v \sqrt{2v} = (\cos. \psi - \frac{2}{3} \cos. \psi^3) v \sqrt{2v}$. Q. E. D. Demonstrationem parum ab hac discrepantem inveni postmodum in eximio Euleriano Opusculo, *Recherches & Calculs sur la vraie Orbite Elliptique de la Comete de l'an. 1769. & son tems periodique*, executées sous la direction de Mr. Leonhard EULER par les soins de Mr. LEXELL. A St. Petersbourg. 1770.

17. Si in hujus expressione temporis substituatur loco $\cos. \psi^3$ ejus valor $\frac{3}{4} \cos. \psi + \frac{1}{4} \cos. 3 \psi$, fit tempus ipsum, quo Cometes ad perihelium pertingit, $= (\cos. \psi - \frac{1}{3} \cos. 3 \psi) v \sqrt{\frac{1}{2} v}$. Caeterum si sectoris parabolici PMS quadraturam aliter investigemus, nimirum ex proprietate parabolae de quadrato ordinatae rectangulum ex abscissa in parametrum aequante; aliam tunc nanciscimur sectoris ipsius expressionem, videlicet

$\frac{1}{p} \left(\frac{1}{8} v^3 \sin. 2\psi^3 + \frac{1}{8} p^2 v \sin. 2\psi \right)$, quae loco ipsius p posito ejus valore $4v \sin. \psi^2$ abit in

$$\left(\frac{1}{2} v^2 \sin. \psi \cos. \psi^3 + v^2 \sin. \psi^3 \cos. \psi \right) = v^2 (\sin. \psi \cos. \psi - \frac{2}{3} \sin. \psi \cos. \psi^3),$$

hacque ducta in $\frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{p}}$, sive in $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{v \sin. \psi^2}}$, oritur

tempus quaesitum $= (\cos. \psi - \frac{2}{3} \cos. \psi^3) v \sqrt{2v}$ prorsus ut ante.

18. Inventa expressione temporis simplicissima, & ad calculos prompte supputandos aptissima, quaeri jam potest qualis esse debeat angulus ψ , sub quo Cometes manente distantia v eadem longissimum tempus infumit, ut ad perihelium descendat. Capiatur nempe expressionis ipsius differentiale $-d\psi \sin. \psi + 2d\psi \sin. \psi \cos. \psi^2$, quod nihilo aequatum praebet $2 \cos. \psi^2 - 1 = 0$, seu $\cos. \psi = \sin. \psi = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Igitur quaesitus angulus $\psi = 45^\circ$, seu semirectus. Eapropter tunc Cometes ad perihelium tardissime pertingit, cum ejus a Sole distantia cum orbitae tangente angulum semirectum constituit. Si porro substituat $\sqrt{\frac{1}{2}}$ loco $\cos. \psi$ in expressione temporis, prodit tempus longissimum $= \frac{2}{3} v \sqrt{v}$, qua fane formula nihil excogitari potest elegantius. Tempus autem *Maximum* sive longissimum hic haberi inde liquet, quod

secunda illius differentia negativum praefert valorem;
 sumpto enim iterum differentiali quantitatis $-d\psi \sin. \psi$
 $+ 2d\psi \sin. \psi \cos. \psi^2$ habetur $-d\psi^2 \cos. \psi +$
 $2d\psi^2 \cos. \psi^3 - 4d\psi^2 \sin. \psi^2 \cos. \psi$, seu
 $d\psi^2 (2 \cos. \psi^3 - 4 \cos. \psi \sin. \psi^2 - \cos. \psi)$,
 ubi posito $\cos. \psi = \sin. \psi = \sqrt{\frac{1}{2}}$ fit demum
 $(\sqrt{\frac{1}{2}} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}})d\psi^2$, hoc est $-2d\psi^2 \sqrt{\frac{1}{2}}$,
 cujus valor manifesto negativus maximum seu lentis-
 simum indicat tempus.



DISQUISITIO VIII.

DE AXIBUS AEQUILIBRII.

1. **N**otum est, vocari a Mechanicis *Axem* *Æquilibrium* figurae cujuslibet planae rectam illam, quae per centrum gravitatis figurae ipsius trajicitur, & *Planum* *Æquilibrium* figurae solidae cujuscumque nuncupari illud, quod per gravitatis centrum ipsius solidi transit: quae sane denominatio petita est ab aequilibrio, quod tuentur & servant partes omnes figurarum planarum solidarumque circa illos *Æquilibrium* Axes, aut *Plana*. Nimirum ea est *Axis*, vel *Plani* *Æquilibrium* proprietas, ut figuram dividat in segmenta bina, quae aequalibus hinc inde librantur momentis. Atque haec momentorum aequalitas evidentissima est, ac nulla peculiari indiget demonstratione quotiescumque *Axis*, aut *Planum* *Æquilibrium* eam obtinet positionem, ut singula figurae elementa bifariam secantur, sed non aequè evidens ac perspicua est quoties ista conditio in *Axe* *Æquilibrium* desideratur. Ut igitur (quod Mechanici passim silentio praetereunt) id ipsum ostendatur in illis etiam casibus, in quibus *Axis*, aut *Planum* *Æquilibrium* singula fi-

gurae elementa non fecat bifariam, duo feligam exempla, alterum trianguli, alterum conii, in quorum primo Axis, in postremo Planum Æquilibrii positionem habent basi parallelam, adeoque diversam a positione requisita; ostendamque in hac quoque Axis positione bina trianguli, & conii segmenta aequalibus momentis circa ipsum Axem librari.

Tab. II. 2. Sit itaque primo triangulum quodvis BAC & Fig. 6. per eius gravitatis centrum E agatur recta MN basi BC parallela; ajo, bina trianguli segmenta MAN , $BMNC$ momentis aequalibus circa Æquilibrii Axem MN librari.

Ducantur enim in triangulo MAN rectae FG, fg , & in trapezio $BMNC$ rectae PQ, pq infinite propin- quae, & Axi MN parallelae, agaturque in ipsas a trian- guli vertice perpendicularum At ; tum dic MN a , AN b ,

FG y , & erit $AT = \frac{by}{a}$, $Tt = \frac{b dy}{a}$, & trianguli

AMN elementum $FG gf = \frac{by dy}{a}$. Hoc aurem ducto

in distantiam TH ab Axe MN oritur illius momen- tum respectu ipsius Axis, hoc est $\frac{by dy}{a} \left(b - \frac{by}{a} \right)$,

cujus integrale $\frac{b^2 y^2}{2a} - \frac{b^2 y^3}{3a^2}$ praebet momentum trian-

guli FAG respectu Axis MN . Si in hac porro expressione fiat $y = a$, prodibit $\frac{1}{2} b^2 a - \frac{1}{3} b^2 a = \frac{1}{6} b^2 a$, quod exhibet momentum totius trianguli MAN respectu Axis MN . Id ipsum consequuti essemus ducta trianguli MAN area $\frac{1}{2} a b$ in distantiam sui centri gravitatis a latere MN sive in $\frac{1}{3} b$.

Sit modo in trapezio $BMNC$ recta $PQ = z$, & invenietur $AI = \frac{bz}{a}$, $Ii = \frac{bdz}{a}$, elementum trapezii

$PQ qp = \frac{bz dz}{a}$, cujus productum in distantiam IH ,

sive in $\frac{bz}{a} - b$ praebet $\frac{b^2 z^2 dz}{a^2} - \frac{b^2 z dz}{a} =$ momen-

to ejus elementi respectu Axis MN . Summa momentorum hujusmodi, hoc est integrale illius expressionis invenitur

$= \frac{b^2 z^3}{3a^2} - \frac{b^2 z^2}{2a} + \text{Const.} =$ momento trapezii $MPQN$; & quoniam evanescente trapezio, seu

facta $z = a$, evanescit ejus momentum, iccirco oritur $\text{Const.} = \frac{1}{2} b^2 a - \frac{1}{3} b^2 a = \frac{1}{6} b^2 a$, & ipsius trapezii

momentum $= \frac{b^2 z^3}{3a^2} - \frac{b^2 z^2}{2a} + \frac{1}{6} b^2 a$. Abeunte vero

PQ in BC sive z in $\frac{3}{2} a$ invenitur totius trapezii $MNCB$

momentum $= \frac{2}{3} b^2 a - \frac{2}{3} b^2 a + \frac{1}{6} b^2 a = \frac{1}{6} b^2 a$. Igi-

tur trianguli MAN , & trapezii $BMNC$ momenta res-

pectu Axis MN inter se aequantur. *Q. E. D.*

3. Sit secundo Conus BAC , & per centrum gravitatis E trajiciatur planum MN basi BC parallelum: dico momentum conii MAN respectu plani MN aequale esse momento frusti conici $BMNC$ respectu plani ejusdem. Ductis planis hinc FG , fg , inde PQ , pq infinite proximis, & basi parallelis, & Ai in eadem plana perpendiculari, fiat circuli MN diameter $= a$, circuli FG diameter $= y$, perpendicularum $AH = b$, sitque $1 : \pi$ ratio diametri ad circuli peripheriam. Erit

jam $AT = \frac{by}{a}$, $Tt = \frac{b dy}{a}$, circulus $FG = \frac{1}{4} \pi y^2$, co-

ni MAN elementum $FGgf = \frac{\pi by^2 dy}{4a}$, quod ductum

in TH , five in $b - \frac{by}{a}$ dat ipsius momentum respectu

Plani MN , nimirum $\frac{\pi b^2 y^2 dy}{4a} - \frac{\pi b^2 y^3 dy}{4a^2}$, & om-

nium hujusmodi momentorum summa, hoc est

$$\int \frac{\pi b^2 y^2 dy}{4a} - \int \frac{\pi b^2 y^3 dy}{4a^2} = \frac{\pi b^2 y^3}{12a} - \frac{\pi b^2 y^4}{16a^2}$$

praebet momentum conii FAG respectu Plani MN .

Abeunte autem FG in MN , seu y in a oritur $\frac{1}{12} \pi b^2 a^2$

$- \frac{1}{16} \pi b^2 a^2 = \frac{1}{48} \pi b^2 a^2 =$ momento totius conii

MAN respectu Plani MN . Idem invenitur ducta conii

MAN soliditate $\frac{1}{12} \pi b a^2$ in distantiam sui centri gravitatis a basi MN , hoc est in $\frac{1}{4} b$.

Rursus in cono truncato $BMNC$ circuli PQ diameter vocetur z , eritque $AI = \frac{bz}{a}$, $Ii = \frac{b}{a} dz$, HI

$= \frac{bz}{a} - b$, circulus $PQ = \frac{1}{4} \pi z^2$, elementum con-

truncati $PQ qp = \frac{\pi b z^2 dz}{4a}$, hujus momentum respectu

Plani $MN = \frac{\pi b z^2 dz}{4a} \left(\frac{bz}{a} - b \right)$. Accepta summa om-

nium momentorum hujusmodi $\int \frac{\pi b z^2 dz}{4a} \left(\frac{bz}{a} - b \right)$,

detegitur $\frac{\pi b^2 z^4}{16 a^2} - \frac{\pi b^2 z^3}{12 a} + \text{Const.} = \text{momento co-}$

ni truncati $PMNQ$: quum autem una cum cono truncato $PMNQ$ evanescat ejus momentum, abeunte nimirum z in a , fit ideo $\text{Const.} = \frac{1}{12} \pi b^2 a^2 - \frac{1}{16} \pi b^2 a^2 = \frac{1}{48} \pi b^2 a^2$; ac proinde frusti ipsius conici momen-

tum evadit $\frac{\pi b^2 z^4}{16 a^2} - \frac{\pi b^2 z^3}{12 a} + \frac{1}{48} \pi b^2 a^2$. Facta

porro $z = \frac{4}{3} a$, seu abeunte PQ in BC (est enim, ex proprietate centri gravitatis, baseos BC diameter $= \frac{4}{3} a$), oritur totius frusti conici $BMNC$ momentum $= \frac{1}{81} \pi b^2 a^2 - \frac{1}{81} \pi b^2 a^2 + \frac{1}{48} \pi b^2 a^2 = \frac{1}{48} \pi b^2 a^2$.

Igitur conus MAN , & frustum conicum $BMNC$ momentis aequalibus circa Planum MN librantur. *Q. E. D.*

4. Hinc luculenter patet quam absurda & praepostera sit centri gravitatis definitio, quae in Mechanicis Institutionibus a nonnemine proponitur, esse nimirum in figura qualibet gravitatis centrum punctum illud, per quod traductum utcumque planum figuram dividit in partes duas aequaliter ponderantes, & consequenter in partes binas aequales, si figura ex materia constet homogenea; cui porro definitioni multorum Theorematum alias comprobatorum inaedificantur demonstrationes, prorsus mendosae & fallaces. Id palam fit in triangulo BAC , ubi Axis aequilibrum MN triangulum secat in partes binas MAN , $BMNC$ aequalibus hinc inde libratis momentis, sed minime aequalibus ponderibus: est enim triangulum MAN ad triangulum BAC uti quadratum MN ad quadratum BC , five ex proprietate centri gravitatis uti 4 ad 9; ac proinde dividendo, triangulum MAN se habet ad trapezium $BMNC$ uti 4 ad 5. Igitur triangulum & trapezium inaequalia sunt, & inaequaliter ponderantia.

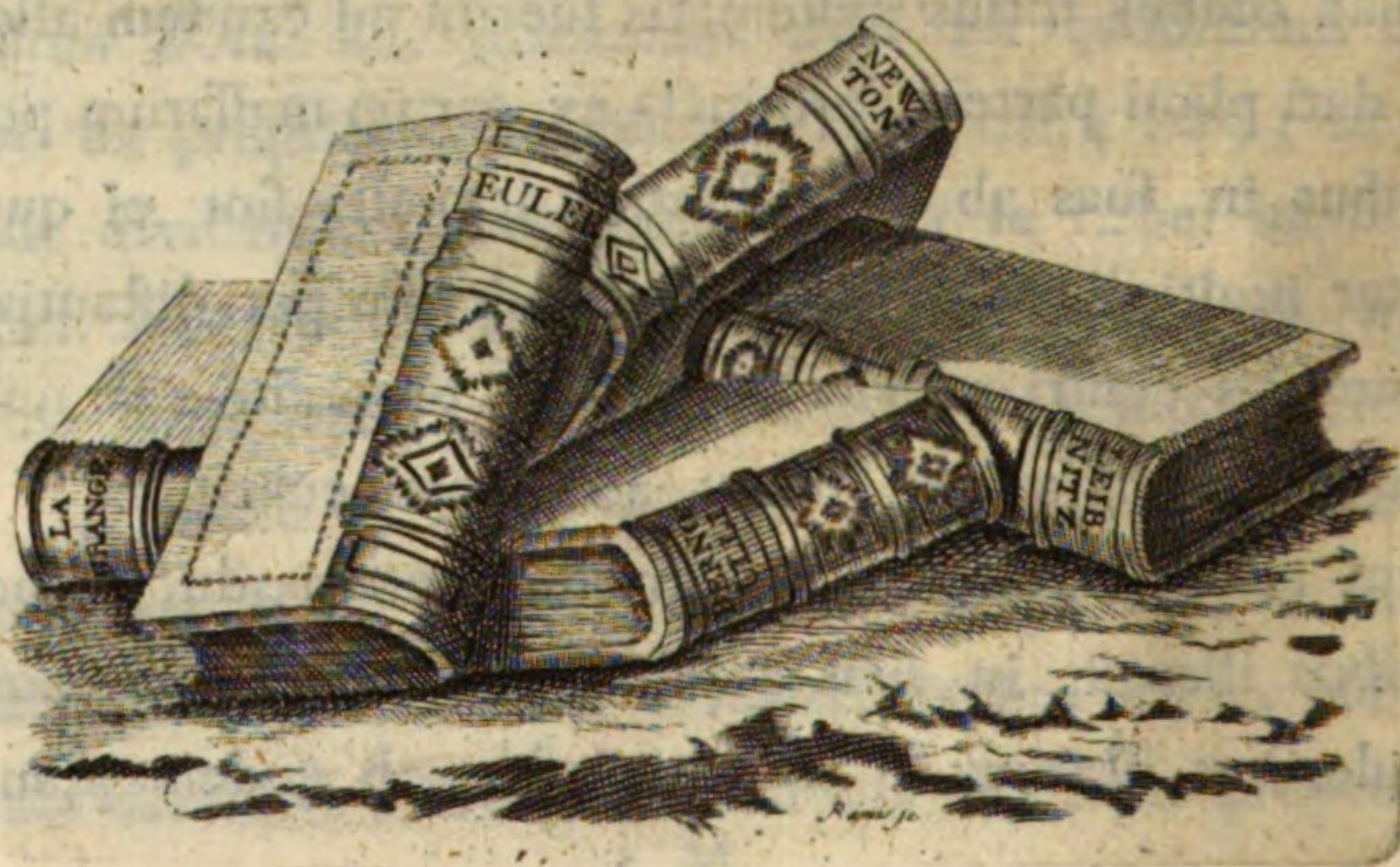
5. Idem in cono quoque perspicuum fit: nam ob conorum MAN , BAC similitudinem, primus se habet ad secundum uti cubus diametri baseos MN , ad cubum diametri baseos BC , five (ex nota proprietate

centri gravitatis in cono) uti cubus numeri ternarii ad cubum quaternarii, hoc est uti 27 ad 64; itaque dividendo, erit conus *MAN* ad frustum conicum *BMNC* uti est 27 ad 37. Ex quo patet, conum ipsum *MAN*, & frustum conicum *BMNC* aequalibus quidem hinc inde urgeri momentis, & circa planum *MN* aequilibrari, sed inaequalibus massis & ponderibus donari.

6. Caeterum a non vulgaribus cultioris Mechanicae Scriptoribus de centro gravitatis, quod in quolibet punctorum gravium vel massarum systemate invenitur, tria haec demonstrari consuevere; 1.^o quod si per centrum illud agatur planum aliquod, massarum ad unam plani partem existentium pondera in suas ab illo distantias ducta tantum efficiant quantum pondera massarum ad aliam plani partem collocatarum, ducta similiter in suas ab ipso plano distantias: 2.^o quod si massae omnes totius systematis fuerint ad eandem alicujus dati plani partem, producta ex earum massarum ponderibus in suas ab eo distantias aequalia sint ei quod oritur multiplicando summam ponderum per distantiam communis centri gravitatis a plano proposito: 3.^o quod si massae nonnullae fuerint ad unam cujuslibet dati plani partem, reliquae ad partem alteram, ductis ponderibus illarum in suas a plano distantias, itidemque ponderibus istarum in distantias suas ab eodem plano,

differentia productorum aequalis sit facto ex aggregato ponderum omnium ducto in distantiam communis centri gravitatis a plano eodem.

7. Ex hisce porro statim consequitur, in figura quavis geometrica *Planum Aequilibrü* ea donari proprietate, ut bina figurae segmenta ipsum interjacentia & quomodocumque inaequalia momentis aequalibus circa illud librentur; at quoniam quaeri merito potest, & saepe quaesitum est a nonnullis, ut id ipsum de *Plano aequilibrü*, sive utcumque per centrum gravitatis traducto ostendatur per se, & non ut corollarium ex praedictis centri gravitatis proprietatibus inferatur; propterea quaesitae demonstrationis specimen in triangulo, & cono exhibuimus; ex quo deinceps ad idem in proposita quacumque fig. 1 ostendendum patefacta erit via.



DISQUISITIO IX.

DE CURVIS A CENTRO GRAVITATIS DESCRIPTIS.

DUM quaelibet geometrica magnitudo motu aliquo fertur vel rotatorio, vel utcumque curvilineo, vel etiam rectilineo; centrum gravitatis ipsius certas quasdam describit semitas, quarum peculiares a Staticae Scriptoribus recensentur proprietates. Harum princeps ac celeberrima ea est, quae ab inventore GULDINO Guldiniana appellatur, licet eam subobscurè PAPPUS Alexandrinus *Collectionum Mathematicarum* Libro VII. indicaverit: in motu scilicet magnitudinis cujuscumque talis est via a centro gravitatis descripta (modo haec perpendicularis ubique fuerit ad magnitudinem motam), ut si viam ipsam ducas in magnitudinem generantem habeas factum aequale figurae motu illo genitae ac productae. Sed praeter semitas hasce Mechanicis dudum notas & excultas, dantur Curvae aliae quaedam, quas centrum gravitatis describit dum a geometrica figura partes quaedam demuntur aliae post alias donec figura evanescat. Curvarum hujusmo-

di aequationes quatuor elegantissimas assequutus, eas hic totidem Problematibus expono, demonstrationesque Geometris facile occurrentes praetermitto. Est itaque

PROBLEMA I.

Tab.II. **S**i a dato Circulo *SEG* demantur per vices & ex
Fig. 7. eadem parte sectores minimi *BCD*, *DCE*, &c. centrum gravitatis areae deinceps residuae iter conficiet curvilineum *CIFO*, cujus initium est circuli centrum, finis punctum *O* in semidiametro minimi sectoris ultimo superstitis, cujus puncti distantia a circuli centro trientes duos semidiametri exaequat. Quaeritur Curvae *CIFO* natura.

S O L U T I O.

Referatur Curva ad centrum Circuli *C* tamquam ad focum, dicaturque *y* ordinata, seu radius vector *CF*, *x* Circuli arcus *BG* ab hac ordinata *CF*, & a postrema *CO* productis interceptus, & dati circuli radius accipiatur unitati aequalis: Ajo, naturam Curvae per hanc aequationem elegantissimam repraesentari

$$y = \frac{2 \sin. x}{3 x}.$$

P R O B L E M A II.

Si a dati Circuli peripheria *FMI* auferantur ordi-
 natim, & ex eadem parte arcus minimi *FG*, *GI*, &c. Tab.II.
Fig. 8.
 centrum gravitatis peripheriae deinceps residuae viam
 percurrent curvilineam *CARF*, incipientem a centro
 circuli, & in extremum semidiametri desinentem. Pe-
 titur hujus semitae indoles.

S O L U T I O.

Accipe, ut antea, Circuli centrum *C* pro semitae
 curvilineae foco, & dic ordinatam *CR* *y*, abscissam seu
 circularem arcum *FE* *x*; circuli radium 1. Aequatio-
 nem curvae simplicissimam hanc habebis.

$$y = \frac{\sin. x}{x}.$$

PROBLEMA III.

Tab.II. Si a dato Circulo QAP per chordas LN , LO ,
Fig.9. LP &c. abscindantur singillatim, & ex eadem semper
parte segmenta minima LN , LO , LP &c. ita
ut gravitatis centrum segmentorum circuli deinceps su-
perstitum recedendo a centro C per Curvam incedat $CUFL$
quousque ad semidiametri extremum L pertingat; quae-
ritur in hac hypothese ejusdem Curvae $CUFL$ aequatio.

S O L U T I O.

Servatis praecedentibus denominationibus radii ve-
ctoris $CF = y$, arcus circularis $LA = x$, & semidia-
metri $= 1$, invenitur quaesita Curvae ad focum C re-
latae aequatio, quae sequitur.

$$y = \frac{2 \sin^3 x}{3x - 3 \sin x \cos x}.$$

P R O B L E M A I V .

Si Sphaera QPA genita ex conversione circuli Tab.III. QPA circa diametrum planis secetur LN , LO , LP , Fig.10. &c., abscindentibus per vices & ex eadem parte segmenta minima LN M, LON , LPO , &c. quaeritur via $CUFL$, quam tenet centrum gravitatis segmentorum sphaerae deinceps residuorum dum a sphaerae centro C ad superficiem usque in L progreditur.

S O L U T I O .

Posito rursus radio vectore $CF = y$, circuli maximi arcu $LA = x$, sphaerae semidiametro $= 1$, Curvae aequatio umbilicalis ita reperitur

$$y = \frac{6 \cos^2 x - 3 \cos^4 x - 3}{12 \cos x - 4 \cos^3 x - 8}$$

SCHOLION GENERALE.

1.^o Aequatio primi Problematis $y = \frac{2 \sin. x}{3x}$ evane-

sciente arcu x mutatur in $\frac{0}{0}$: attamen tunc y est $= \frac{2}{3}$,

ut constat. Sed sumpto arcu infinitesimo dx invenitur

revera $y = \frac{2 \sin. dx}{3 dx} = \frac{2 dx}{3 dx} = \frac{2}{3}$, quum perspectum

alias sit sinum arcus infinitesimi dx non differre ab ipso arcu dx .

2.^o Pariter secundi Problematis aequatio $y = \frac{\sin. x}{x}$,

quae transformatur in $\frac{0}{0}$ posito $x = 0$, per eandem sub-

stitutionem evadit $y = \frac{\sin. dx}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$, qualem esse

oportet.

3.^o Ad aequationem quod attinet Problematis tertii, sumpto ibi, uti prius, arcu infinitesimo dx , repe-

ritur $y = \frac{2 \sin.^3 dx}{3 dx - 3 \sin. dx}$ (existente scilicet $\cos. dx = 1$),

vel $y = \frac{2 dx^3}{3 dx - 3 dx} = \frac{2 dx^2}{0}$, quae fane expressio

suspecta & deceptrix neutiquam praebet $y = 1$, quem-

admodum opus esset. Scrupulus evellitur, si consideres, aequationis numeratorem quantitatem esse infinitesimam ordinis tertii, & in fractionis denominatore arcum minimum x differre a sinu suo quantitate pariter infinitesima tertii ordinis: quare necesse erit ad functionum circularium series confugere, ut nodus solvatur. Notum est, haberi

$$\sin. dx = dx - \frac{dx^3}{2 \cdot 3} + \frac{dx^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \&c.$$

$$\cos. dx = 1 - \frac{dx^2}{2} + \frac{dx^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \&c.$$

Neglectis igitur differentialibus ultra ordinem tertium, fiet $\sin.^3 dx = dx^3$, & $\sin. dx \cos. dx = dx - \frac{2}{3} dx^3$.

Quapropter aequatio $y = \frac{2 \sin.^3 dx}{3 dx - 3 \sin. dx \cos. dx}$ conver-

tetur in $y = \frac{2 dx^3}{3 dx - 3 dx + 2 dx^3} = \frac{2 dx^3}{2 dx^3} = 1$, uti oportet.

$$4^o \text{ Quarta denique aequatio } y = \frac{6 \cos.^2 x - 3 \cos.^4 x - 3}{12 \cos. x - 4 \cos.^3 x - 8},$$

quae, five pro x assumatur dx , five nihilum, abit in $y = \frac{0}{0}$, generali legi pariter subicitur hoc pacto: Constat, esse

$$\cos. dx = 1 - \frac{1}{2} dx^2 + \frac{1}{24} dx^4 - \&c.$$

Itaque contemptis differentialibus ultra quartum gradum fiet

$$\begin{aligned} 6 \cos.^2 dx &= 6 - 6 dx^2 + 2 dx^4 \\ - 3 \cos.^4 dx &= - 3 + 6 dx^2 - 5 dx^4 \\ - 3 &= - 3. \end{aligned}$$

Quare aequationis numerator evadit $- 3 dx^4$. Rursus

$$\begin{aligned} 12 \cos. dx &= 12 - 6 dx^2 + \frac{1}{2} dx^4 \\ - 4 \cos.^3 dx &= - 4 + 6 dx^2 - \frac{7}{2} dx^4 \\ - 8 &= - 8. \end{aligned}$$

Ergo etiam aequationis denominator reperitur $- 3 dx^4$.

Proinde evanescente arcu x oritur $y = \frac{- 3 dx^4}{- 3 dx^4} = 1$,
uti res postulat.



DISQUISITIO X.

DE SINGULARIBUS QUIBUSDAM CENTRI GRAVITATIS AFFECTIONIBUS IN SPATIO HYPERBOLICO-ASYMPTOTICO.

1. **C**entri gravitatis investigatio in Spatio Hyperbolico-asympotico quaedam exhibet mira prorsus ac singularia, quae dum ingenium acuunt & exercent imaginandi vim simul magnopere oblectant. Ea breviter attingam, plura huc spectantia vel affinia alio tempore daturus.

Tab.III.

Fig.II.

2. Inveniendum sit primo centrum gravitatis Spatii Hyperbolico-asympotici indeterminati $BAMN$ a binis ordinatis BA , MN intercepti. Ducta ordinata nm alteri NM infinite proxima, constat ex Statica, distantiam centri gravitatis a recta BA inveniri si quodlibet spatii elementum $NMmn$ multiplicetur per distantiam suam ab ipsa recta BA , & omnium hujusmodi productorum summa dividatur per summam elementorum.

Esto itaque

$$EB = b,$$

$$BA = a,$$

$$BN = x,$$

$$NM = y,$$

$$\text{angulus } E = \varphi.$$

Hyperbolae proprietates aequationem praebet

$ab = y(b+x)$; elementum vero NM invenitur

$$= y dx \sin. \varphi = \frac{abx dx \sin. \varphi}{b+x}, \text{ hocque ductum in distan-}$$

$$\text{tiam } ND \text{ a recta } BA, \text{ sive in } x \sin. \varphi \text{ prodit } = \frac{abx dx \sin^2 \varphi}{b+x}.$$

Summa omnium istiusmodi productorum, seu

$$\int \frac{abx dx \sin^2 \varphi}{b+x} \text{ reperitur } = abx \sin^2 \varphi - ab^2 \sin^2 \varphi \times$$

$\log. (b+x) + \text{Const.}$; quae quidem summa quum evanescat una cum x , oritur $\text{Const.} = ab^2 \sin^2 \varphi \log. b$,

$$\text{ac proinde } \int \frac{abx dx \sin^2 \varphi}{b+x} = abx \sin^2 \varphi - ab^2 \sin^2 \varphi \times$$

$$\log. \frac{b+x}{b}. \text{ Est porro elementorum summa } \int y dx \times$$

$$\sin. \varphi = \int \frac{ab dx \sin. \varphi}{b+x} = ab \sin. \varphi \log. (b+x)$$

+ Const. = $ab \sin. \phi \log. \frac{b+x}{b}$. Si itaque summa prior dividatur per hanc, quotiens $\frac{x \sin. \phi}{\log. (b+x) - \log. b}$ — $b \sin. \phi$ exprimit distantiam quaesitam centri gravitatis ab ordinata prima BA .

3. Occurrit hic primo quaedam antilogiae species quando ponitur $x = 0$, in qua fane hypothese evanescente spatio $ABnm$ debet etiam distantia ipsius centri gravitatis a recta BA evanescere: attamen istius distantiae expressio $\frac{x \sin. \phi}{\log. (b+x) - \log. b} - b \sin. \phi$ abit tunc in $\frac{0}{0} - b \sin. \phi$, quae porro quantitas longe abesse videtur a nihilo.

4. Ad arcendam antilogiam, capio in fractione $\frac{x \sin. \phi}{\log. (b+x) - \log. b}$ differentiale tum numeratoris, tum denominatoris; & fractio ipsa convertitur in

$$\frac{dx \sin. \phi}{dx : (b+x)} = (b+x) \sin. \phi = b \sin. \phi \text{ ubi fuerit } x = 0 :$$

quamobrem in hac hypothese expressio $\frac{x \sin. \phi}{\log. (b+x) - \log. b} - b \sin. \phi$ mutatur in $b \sin. \phi - b \sin. \phi$, hoc est in

nihilum, quemadmodum rei natura postulat.

5. Eliminatur rursus antilogia, si pro x accipiat non nihilum absolutum, seu 0, sed infinitesima magni-

tudo dx : tunc enim expressio $\frac{x \sin. \varphi}{\log. (b+x) - \log. b}$

$- b \sin. \varphi$ evadit $\frac{dx \sin. \varphi}{\log. (b+dx) - \log. b} - b \sin. \varphi$;

cumque sit $\log. (b+dx) = \log. b + \frac{dx}{b} - \frac{dx^2}{2b^2} + \frac{dx^3}{3b^3}$

$- \frac{dx^4}{4b^4} + \&c. = \log. b + \frac{dx}{b}$, orietur eadem ex-

pressio $= \frac{dx \sin. \varphi}{\log. b + \frac{dx}{b} - \log. b} - b \sin. \varphi = b \sin. \varphi$

$- b \sin. \varphi = 0$, uti oportet.

6. Quaero nunc in spatio infinito $ABST$ distan-

tiam centri gravitatis a recta BA . Capió igitur x in-

finitam in formula $\frac{x \sin. \varphi}{\log. (b+x) - \log. b} - b \sin. \varphi$, quae

iccirco abit in $\frac{x \sin. \varphi}{\log. x}$. Porro fractio haec numerato-

rem habet infinitum, infinitumque pariter denomina-

torem, sed hunc in immensum minorem quam illum; constat enim, logarithmum infiniti numeri $1 + 1 + 1$

$+ 1 + \&c.$ in inf. seriem praebere numerorum na-

turalium reciprocam $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \&c.$ in inf., quarum quidem serierum posterior haec harmonica infinita est, uti alias liquet, sed simul infinities minor est quam series parallela unitatum, ut seriei progressum attendenti perspicuum fit. Quum igitur fractionis $\frac{x \sin. \phi}{\log. x}$ numerator infinitus sit, & denominator

pariter infinitus, sed hic infinities minor quam ille, prodit iccirco fractionis valor infinitus. Quamobrem centrum gravitatis spatii hyperbolico-asymptotici infiniti *BATS* intervallo distat infinito ab ejus origine *BA*.

7. Pergo porro, & investigo distantiam centri gravitatis Spatii *BAMN* ab asymptoto *ES*. In elemento *NMmn* a puncto ejus medio *F*, hoc est a centro gravitatis ipsius duco normalem *FG* in asymptotum *ES*,

quae normalis invenitur $= \frac{1}{2} y \sin. \phi = \frac{ab \sin. \phi}{2b + 2x}$; ele-

mentum vero ipsum *NMmn* inventum est $= \frac{ab dx \sin. \phi}{b + x}$.

Quare factum ipsius elementi in distantiam sui centri gravitatis ab asymptoto *ES*, nimirum in *FG* prodibit

$= \frac{a^2 b^2 dx \sin^2 \phi}{2(b + x)^2}$. Capió nunc horum factorum sum-

mam $\int \frac{a^2 b^2 dx \sin^2 \phi}{2(b + x)^2}$, & nanciscor $= \frac{a^2 b^2 \sin^2 \phi}{2b + 2x}$

+ Const. Determinatur Const., posita $x = 0$, qua in hypothesis evanescit summa factorum, & fit Const. =

$$\frac{1}{2} a^2 b \sin^2 \varphi; \text{ ac proinde } \int \frac{a^2 b^2 dx \sin^2 \varphi}{2(b+x)^2} = \frac{1}{2} a^2 b \sin^2 \varphi - \frac{a^2 b^2 \sin^2 \varphi}{2b + 2x}.$$

Divisa porro hac quantitate per elementorum summam

$$\int \frac{ab dx \sin \varphi}{b+x} = ab \sin \varphi \log.(b+x) + \text{Const.}$$

$$= ab \sin \varphi \log. \frac{b+x}{b}, \text{ oritur quaesita distantia}$$

$$= \frac{a \sin \varphi}{2 \log.(b+x) - 2 \log.b} - \frac{ab \sin \varphi}{(2b+2x)[\log.(b+x) - \log.b]}$$

$$= \frac{ax \sin \varphi}{(2b+2x)[\log.(b+x) - \log.b]}.$$

8. Evanefcente spatio $BAMN$, seu facto $x = 0$,

$$\text{centri gravitatis distantia } \frac{ax \sin \varphi}{(2b+2x)[\log.(b+x) - \log.b]}$$

convertitur in $\frac{0}{0}$, quum tamen evidens sit, distantiam illam tunc aequari perpendicularo, quod a puncto medio originis BA ipsius spatii cadit in asymptotum ES , quod sane perpendicularum reperitur $= \frac{1}{2} a \sin \varphi$.

9. Hanc rursus ambiguitatem amoveo ope differentiationis tum numeratoris, tum denominatoris, ex

$$\text{qua habetur } \frac{a dx \sin. \varphi}{2dx[\log.(b+x) - \log.b] + \frac{dx}{b+x}(2b+2x)}$$

$$= \frac{a \sin. \varphi (b+x)}{(2b+2x)[1 + \log.(b+x) - \log.b]}. \text{ Haec porro}$$

quantitas in hypothese $x = 0$ manifesto evadit $\frac{1}{2} a \sin. \varphi$, quemadmodum oportet.

10. Idem nanciscimur sumpta pro x quantitate infinitesima dx : hac enim loco x subrogata in praecedenti formula deprehenditur

$$\frac{a dx \sin. \varphi}{(2b+2dx)[\log.(b+dx) - \log.b]}$$

$$= \frac{a dx \sin. \varphi}{2b [\log.(b+dx) - \log.b]}, \text{ quae } \left(\text{ob } \log.(b+dx) \right.$$

$$= \log.b + \frac{dx}{b} - \frac{dx^2}{2b^2} + \&c. = \log.b + \frac{dx}{b} \Big) \text{ con-}$$

$$\text{vertitur in } \frac{a dx \sin. \varphi}{2b \left(\frac{dx}{b} + \log.b - \log.b \right)} = \frac{1}{2} a \sin. \varphi.$$

11. Transeo nunc ad distantiam exquirendam centri gravitatis in Spatio infinito *BAST* ab asymptoto

ES. Assumo itaque x infinitam in formula

$$\frac{ax \sin. \varphi}{(2b + 2x) [\log. (b + x) - \log. b]}, \text{ quae evidenter de-}$$

$$\text{generat in } \frac{ax \sin. \varphi}{2x \log. x} = \frac{a \sin. \varphi}{2 \log. x} : \text{ quum vero } \frac{a \sin. \varphi}{2 \log. x}$$

quantitas sit manifesto infinitesima, consequens est, centrum gravitatis Spatii infiniti Hyperbolico-asymptotici *ABST* abesse infinito intervallo ab origine *BA*, proindeque ab asymptoto una *EQ*, infinitesimo ab asymptoto altera *ES*.



DISQUISITIO XI.

DE MAXIMIS ET MINIMIS.

1. **P**raestantissima *Maximorum Minimorumque* Doctrina, quae nobiliorem utilioreque Differentialis Calculi partem constituit, nuperis hisce temporibus tot tantisque summorum Geometrarum laboribus exulta est, inventis ditata, & amplificata accessionibus, ut ad summum perfectionis fastigium perducta jam esse videatur. Attamen, tametsi uberrima rerum copia pulcherrimarum, quibus haec abundat Doctrina, nihil ferme spei relinquat, huic absolutissimae Theoriae adhuc posse nonnihil addi, spicilegium aliquod inter tam amplas messes ei faciendum superest, qui acrius ac follertius Theoriam hanc in illis quantitatis variabilis functionibus experiri voluerit, quae originem sortiuntur ex functionibus aliis per se invicem multiplicatis, divisis, & ad quamcumque potestatem elevatis. Itaque operae pretium me facturum existimavi, si id ipsum in *Functionibus* primo *Rationalibus* utcumque

multiplicatis, divisis, &c. periclitarer, novis subinde detectis conditionibus ac regulis Maxima ac Minima functionum istarum definientibus, persecuturus posthac argumentum nobile ac splendidum in *Functionibus* quoque *Irrationalibus*, ac *Transcendentibus*, quae copiosius spicilegium pollicentur. Caeterum quando haec Maximorum Minimorumque Methodus ad ea Problemata solvenda adhibetur, in quibus quaeruntur Lineae Curvae Maximi alicujus Minimive proprietate gaudentes efficitur illud in nova Analyfi mirificum ac prope singulare, quod ab inventore LA GRANGE *Calculi Variationum* nomine insignitum fuit; in quo scilicet quantitas, quae maxima aut minima esse debet, ita ad Curvam totam refertur, ut mutato quolibet ejus Curvae elemento, & ipsa mutetur. Et quamvis Problemata hujusmodi ante inventum Variationum Calculum Solutione haudquam carerent, ut videre est in absolutissimo Euleriano Opere de *Maximis ac Minimis*; attamen magno ipso EULERO non diffitente non omnia solutionem sat commodam vel ex toto analyticam admittebant, & nonnulla analysim vulgarem omnino respuere, vel certe transcendere videbantur, ut hinc etiam appareat quam longe absit, ut Differentialis Calculus cum Calculo Variationum confundi citra piaculum possit.

Esto X functio quaecumque $\tau\tilde{x}$ x , sive algebraica, sive transcendens; si in ea ponatur ubivis $x + \varphi$ loco $\tau\tilde{x}$ x , functio ipsa X recipit hanc formam

$$X + \frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2dx^2} + \frac{\varphi^3 dddX}{2.3dx^3} + \frac{\varphi^4 d^4X}{2.3.4dx^4} + \&c.$$

DEMONSTRATIO.

Constat ex Calculi Differentialis principiis, functionem X posito $x + dx$ loco $\tau\tilde{x}$ x abire in $X + dX$, & rursus in $X + dX$ posito $x + dx$ pro x augeri $X + dX$ differentiali suo $d.(X + dX)$, seu fieri $X + 2dX + ddX$, atque in hac iterum pro x posito $x + dx$ prodire $X + 2dX + ddX + d.(X + 2dX + ddX)$, hoc est $X + 3dX + 3ddX + dddX$; sicque porro deinceps. Atque hi quidem $\tau\tilde{x}$ X valores respondent ipsius x valoribus $x + dx$, $x + 2dx$, $x + 3dx$ in X substitutis (a). Oritur igitur tabella:

(a) Esto $F.x$ functio quaecumque ipsius x , ponaturque $x + dx$ pro x ; ea abit in $F.(x + dx)$. In hac iterum pro x pone $x + dx$, habebisque $F.(x + dx + dx)$, seu $F.(x + 2dx)$; quod quidem ipsum obvenisset, si in priori $F.x$ protinus posuisses $x + 2dx$ loco $\tau\tilde{x}$ x . Sique iterum in $F.(x + 2dx)$ pones $x + dx$ pro x , obveniet $F.(x + 3dx)$; neque aliud prodiiisset, si in $F.x$ posuisses ab initio $x + 3dx$ loco ipsius x . Eadem est de reliquis ratiocinatio.

Valores x	Valores respondentes X
x	X
$x + dx$	$X + dX$
$x + 2dx$	$X + 2dX + ddX$
$x + 3dx$	$X + 3dX + 3ddX + dddX$
$x + 4dx$	$X + 4dX + 6ddX + 4dddX + d^4X$
$x + 5dx$	$X + 5dX + 10ddX + 10dddX + 5d^4X + d^5X$
$x + 6dx$	$X + 6dX + 15ddX + 20dddX + 15d^4X + 6d^5X + d^6X$
$x + 7dx$	$X + 7dX + 21ddX + 35dddX + 35d^4X + 21d^5X + 7d^6X + d^7X$
&c.	&c.

Nemo non videt, coefficientes valorum x congruere cum coefficientibus terminorum Binomii Newtoniani ad datam potestatem elevati. Ac proinde abeunte x in $x + ndx$ functio X abibit in formulam universalem

$$X + ndX + \frac{n \cdot n - 1 \cdot ddX}{2} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot dddX}{2 \cdot 3}$$

$$+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot d^4 X}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

Si jam fuerit n numerus infinitus, five omni assignabili major, evanescent in factoribus singulis $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$, $\&c.$ numeri -1 , -2 , -3 , $\&c.$ prae infinito n , ac Formula contrahetur in sequentem

$$X + ndX + \frac{n^2 ddX}{2} + \frac{n^3 dddX}{2 \cdot 3} + \frac{n^4 d^4 X}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{n^5 d^5 X}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\ + \frac{n^6 d^6 X}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \&c.$$

Ponatur finita quantitas $ndx = \phi$, adeoque $n = \frac{\phi}{dx}$ ac fiat substitutio. Induet functio X ex positione $x + ndx$, seu $x + \phi$ loco ipsius x praescriptam formam

$$X + \frac{\phi dX}{dx} + \frac{\phi^2 ddX}{2 dx^2} + \frac{\phi^3 dddX}{2 \cdot 3 dx^3} + \frac{\phi^4 d^4 X}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} \\ + \frac{\phi^5 d^5 X}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 dx^5} + \&c.$$

Q. E. D.

2. Cor. Si quantitas negativa fuerit, hoc est $-\phi$, praecedentis Formulae termini pares negativo signo afficientur, impares positivo, quod est per se manifestum. Igitur forma generalissima, in quam abit functio

X ex positione $x \pm \varphi$ pro x , repraesentatur per

$$X \pm \frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2dx^2} \pm \frac{\varphi^3 dddX}{2.3dx^3} + \frac{\varphi^4 d^4X}{2.3.4dx^4} \\ \pm \frac{\varphi^5 d^5X}{2.3.4.5dx^5} + \&c.$$

S C H O L I O N I.

3. Theorematis Formula aliquam habet analogiam cum Bernoulliana, quam videre est in *Act. Lips. ann. 1694*, & in *Oper. Joh. BERNOULLII tom. 1. n. 21*. Statuit BERNOULLIUS N quantitatem quomodocumque compositam ex indeterminatis & constantibus, invenitque

$$\int Nd\zeta = \zeta \left(N - \frac{\zeta dN}{2 d\zeta} + \frac{\zeta^2 ddN}{2.3 d\zeta^2} - \frac{\zeta^3 dddN}{2.3.4 d\zeta^3} + \&c. \right).$$

Indirecta utitur methodo ad id ostendendum BERNOULLIUS, quod directe nulloque negotio ex notissimis Integralis Calculi scitis licet eruere quando N fun-

ctio est $\tau \zeta$. Cum enim sit $\int Nd\zeta = N\zeta - \int \zeta dN$;

si fiat $dN = N' d\zeta$, erit rursus $\int \zeta dN$, sive $\int N' \zeta d\zeta$

$$= \frac{z^2 N'}{2} - \int \frac{z^2 dN'}{2}. \text{ Posito iterum } dN' = N'' dz,$$

$$\text{oritur } \int \frac{z^2 dN'}{2}, \text{ seu } \int \frac{N'' z^2 dz}{2} = \frac{z^3 N''}{2 \cdot 3} - \int \frac{z^3 dN''}{2 \cdot 3}:$$

$$\text{factoque rursus } dN'' = N''' dz, \text{ habetur } \int \frac{z^3 dN''}{2 \cdot 3}, \text{ seu}$$

$$\int \frac{N''' z^3 dz}{2 \cdot 3} = \frac{z^4 N'''}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \int \frac{z^4 dN'''}{2 \cdot 3 \cdot 4}; \text{ sicque porro. Sub-}$$

rogatis hisce valoribus in priori formula $\int N dz$, ea in-

$$\text{venietur } = z \left(N - \frac{z N'}{2} + \frac{z^2 N''}{2 \cdot 3} - \frac{z^3 N'''}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c. \right),$$

$$\text{hoc est assumpto } dz \text{ constanti, } \int N dz = z \left(N - \frac{z dN}{2 dz} \right.$$

$$\left. + \frac{z^2 ddN}{2 \cdot 3 dz^2} - \frac{z^3 dddN}{2 \cdot 3 \cdot 4 dz^3} + \&c. \right). \text{ Sed majorem habet}$$

formula nostra affinitatem cum Maclauriniana, quam vides in eximio Opere *Treatise of Fluxions* §. 751., ubi expressa y per seriem $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$, in qua constantes singulae $A, B, C, \&c.$ poni etiam possunt, si opus fuerit, nihilo aequales, si evanescente z dicatur E valor $\tau\delta y$, fluat vero uniformiter z , inve-

nitur $y = E + \frac{z d E}{d z} + \frac{z^2 dd E}{2 d z^2} + \frac{z^3 ddd E}{2.3 d z^3} + \&c.$ Ma-

clauriniana demonstratio ita se habet: Quoniam $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$, facto $z = 0$, orietur $y = A$, five ex hypothesi $= E$. Sumptis vero fluxio-

nibus erit $\frac{dy}{dz} = B + 2 Cz + 3 Dz^2 + \&c.$, &

evanescente z fiet $B = \frac{dy}{dz} = \frac{dE}{dz}$. Acceptis rursus flu-

xionibus prodit $\frac{ddy}{dz^2} = 2 C + 2.3 Dz + \&c.$, po-

sitoque $z = 0$, habetur $C = \frac{ddy}{2 dz^2}$, five $= \frac{dd E}{2 dz^2}$. Eru-

tis iterum fluxionibus colligitur $\frac{ddy}{dz^3} = 2.3 D + \&c.$,

& facto $z = 0$, fit $D = \frac{ddy}{2.3 dz^3}$, seu $= \frac{ddd E}{2.3 dz^3}$.

Sicque porro, coefficientes reliqui determinantur. Igi-

tur $y = A + Az + Cz^2 + Dz^3 + \&c. =$

$E + \frac{z d E}{d z} + \frac{z^2 dd E}{2 d z^2} + \frac{z^3 ddd E}{2.3 d z^3} + \&c.$

Demonstrationem aliam elegantissima synthesi adornavit idem MACLAURINUS §. 255. Id ipsum jampridem inveni-
nerat TAYLORUS in profundissima Disquisitione de *Methodo Incrementorum*.

S C H O L I O N II.

4. Si X exprimatur generali formula $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$, quod fieri semper potest vel accurate, vel quamproxime ut liquet, alia succurrit brevior Theorematis nostri demonstratio. Nam substituendo $x + \varphi$ pro x , abit formula in $A + B(x + \varphi) + C(x + \varphi)^2 + D(x + \varphi)^3 + E(x + \varphi)^4 + F(x + \varphi)^5 + \&c. =$
 $+ A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c. (M)$
 $+ B\varphi + 2Cx\varphi + 3Dx^2\varphi + 4Ex^3\varphi + 5Fx^4\varphi + \&c. (N)$
 $+ C\varphi^2 + 3Dx\varphi^2 + 6Ex^2\varphi^2 + 10Fx^3\varphi^2 + \&c. (O)$
 $+ D\varphi^3 + 4Ex\varphi^3 + 10Fx^2\varphi^3 + \&c. (P)$
 $+ E\varphi^4 + 5Fx\varphi^4 + \&c. (Q)$
 $+ F\varphi^5 + \&c. (R).$

Est vero, ut patet,

$$(M) = X,$$

$$(N) = \frac{\varphi dX}{dx},$$

$$(O) = \frac{\varphi^2 ddX}{2 dx^2},$$

$$(P) = \frac{\varphi^3 dddX}{2.3 dx^3},$$

$$(Q) = \frac{\varphi^4 d^4X}{2.3.4 dx^4},$$

$$(R) = \frac{\varphi^5 d^5X}{2.3.4.5 dx^5}, \text{ \&c.}$$

posita x aequabiliter fluente, hoc est $ddx = 0$.

Igitur $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{\&c.}$

$$= X + \frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2 dx^2} + \frac{\varphi^3 dddX}{2.3 dx^3}$$

$$+ \frac{\varphi^4 d^4X}{2.3.4 dx^4} + \frac{\varphi^5 d^5X}{2.3.4.5 dx^5} + \text{\&c.}$$

Si φ negativo signo accipiatur, locorum parium termini hoc eodem signo affecti prodibunt. Inde vero fiet ge-

$$\text{neraliter } A + B(x \pm \varphi) + C(x \pm \varphi)^2 + D(x \pm \varphi)^3 \\ + \&c. = X \pm \frac{\varphi dx}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2dx^2} \pm \frac{\varphi^3 dddX}{2.3 dx^3} + \&c.$$

S C H O L I O N III.

5. Quantitas φ , quam finitam accepimus, assumi etiam potest utcumque parva, immo finita qualibet quantitate in immensum minor, hoc est infinitesima. Ad hoc enim satis est sumere dx infinitesimam secundi ordinis (quod late concessum, ut constat); tuncque fiet ndx , seu φ infinitesima ordinis primi, qualem nos in posterum habebimus.

D E F I N I T I O I.

6. Dicitur X *Functio Uniformis* $\tau\grave{s} x$, si valoribus singulis determinatis ipsius x singuli respondent determinati valores, non geminati, non plures Functionis X .

7. Cor. Functiones omnes Algebraicae Rationales, siue Integrae, siue Fractae, Uniformes sunt. Integrarum formula generalis est $a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + gx^5 + \&c.$, Fractarum vero est $\frac{a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + \&c.}{a' + b'x + c'x^2 + e'x^3 + f'x^4 + \&c.}$; atque ejusmodi expressiones, quemcumque variabili x valorem

tribuas, nonnisi unicum valorem praebent, respondentem valori unico ipsius x .

D E F I N I T I O II.

8. Vocatur X *Functio Multiformis* $\tau\tilde{x}$ x , si pro unico valore determinato in locum x substituto, non unicum, sed plures determinatos valores praesefert.

9. Cor. 1. Functiones omnes Irrationales Multiformes sunt ob multiplicem valorem terminorum radicalium, quibus quantitas variabilis involvitur.

10. Cor. 2. Functio X Biformis, Triformis, Quadriformis, &c. erit, si ea determinetur per aequationem secundi, tertii, quarti, &c. gradus; ac generatim n^{formis} erit eadem X , seu pro unico valore $\tau\tilde{x}$ x valores diversos praeseferet numero n , si ea definiatur per aequationem $X^n - MX^{n-1} + NX^{n-2} - PX^{n-3} + QX^{n-4} - \&c. = 0$; in qua quidem aequatione quantitates M , N , P , Q , &c. functiones designant uniformes $\tau\tilde{x}$ x , estque M , ut compertum alias, summa omnium valorum Functionis X , N summa factorum ex binis, P summa factorum ex ternis, Q summa factorum ex quaternis, &c.

11. Cor. 3. Functiones quoque Transcendentes vel Uniformes esse possunt, vel Multiformes. Quin etiam

in hisce habentur & *Infitiformes* : nam Functiones Transcendentes $A \sin.x$, $A \cos.x$, $A \tan.x$, $A \cot.x$, $A \sec.x$, $A \csc.x$, in quibus A designat arcum circuli habentem x sinum, vel cosinum, &c., Infinitiformes sunt ob infinitos arcus uni eidemque valori ipsius x respondentes.

12. Cor. 4. Si Functio Multiformis X unicum tantum exhibeat valorem realem pro valore quovis unico ipsius x , reliquis existentibus imaginariis, ea instar functionis Uniformis habebitur. Ita generatim

$$\left(a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + gx^5 + \&c. \right)^{\frac{m}{n}} \text{ fun-}$$

ctio est specie Multiformis, re Uniformis, si n sit numerus impar, m vero sive par, sive impar; in hoc enim casu unicus est, ut constat, Functionis valor realis, reliqui omnes imaginarii. Quod si n numerus fuerit par, Functio eadem vel Biformis erit, vel Nulliformis ob valorem ejus realem vel geminum, vel nul-

lum in hac hypothese, dummodo fractio $\frac{m}{n}$ minimis terminis fuerit expressa.

DEFINITIO III.

13. Functio X *Maximum* fortitur valorem A ex substitutione valoris determinati a in locum variabilis

x , si A major fuerit tum valoribus A' , A'' , A''' , &c. proxime antecedentibus, tum valoribus $\dot{A}$, $\ddot{A}$, $\ddot{\ddot{A}}$, &c. proxime sequentibus, quos successive acquirit eadem X ex aliquantulo tum incremento, tum decremento variabilis x ultra a . Vicissim Functio X *Minimum* obtinet valorem A respondentem valori determinato a in locum $\tau_8 \tilde{x}$ subrogato, si A minor fuerit quam valores A' , A'' , A''' &c. proxime antecedentes, & $\dot{A}$, $\ddot{A}$, $\ddot{\ddot{A}}$, &c. proxime consequentes, in quos successive abit ipsa X , si variabilis x vel aliquantulum augeatur ultra a , vel aliquantulum minuatur. Esto ex.

$$\text{gr. } X = \frac{a^3}{x^2 - 2bx + b^2 + c^2}, \text{ quae oritur } \textit{Maxima}$$

ponendo $x = b$, fitque $X = \frac{a^3}{c^2}$; si enim variabilem x tantillum sive augeas, sive minuas ultra b , sumasque $x = b \pm \omega$ (accepta ω utcumque parva) fiet semper

$$X = \frac{a^3}{c^2 + \omega^2} < \frac{a^3}{c^2}. \text{ Si vicissim fuerit } X = x^2$$

$- 2fx + f^2 \pm g^2$, ea *Minima* evadet, nimirum $= \pm g^2$, posito f pro x ; propterea quod accepta x aliquantillum sive majori, sive minori quam f , videlicet facta $x = f \pm \omega$, oritur in utroque casu $X = \pm g^2 + \omega^2 > \pm g^2$.

P R Æ N O T A T I O.

14. Designantibus $P, Q, R, T, \&c.$ functiones rationales integras $\tau \tilde{x}$, & $p, q, r, t, \&c.$ numeros integros positivos, atque etiam nihilum, Functio nostra X (quam hic rationalem integram supponimus) ad sex formas sequentes opportune ac commode revocabitur:

$$1^{\circ} X = P;$$

$$2^{\circ} X = PQ;$$

$$3^{\circ} X = PQR T \dots \&c.;$$

$$4^{\circ} X = P^p;$$

$$5^{\circ} X = P^p Q^q;$$

$$6^{\circ} X = P^p Q^q R^r T^t \dots \&c.$$



P A R S I.

*De Maximis ac Minimis Functionum Rationalium
Integrarum.*

P R O B L E M A I.

15. Invenire Maximum, ac Minimum valorem Functionis integrae $X = P$.

SOLUTIO.

Ad hoc præstandum invenire oportet valorem determinatum variabilis x , qui loco $\tau\tilde{x}$ in Functione X , vel P subrogatus eam reddat Maximam, Minimamve. Sit igitur 1.^o x talis qualis oportet, ut valor Functionis X *Maximus* fiat. Si jam in hac hypothefi augeatur x quantitate utcumque parva φ , ac substituatur $x + \varphi$ loco $\tau\tilde{x}$ in Functione X , series inde orta

$$(1.) X + \frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2 dX^2} + \frac{\varphi^3 dddX}{2.3 dx^3} + \frac{\varphi^4 d^4 X}{2.3.4 dx^4}$$

+ &c. minor erit (13.), quam X : ac similiter si x minuatur utcumque minima quantitate φ , & pro x ponatur ubivis $x - \varphi$ in expressione Functionis X , valor

$$\text{seriei, in quam abit ipsa } X, \text{ hoc est } (2.) X - \frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2 dx^2} - \frac{\varphi^3 dddX}{2.3 dx^3} + \frac{\varphi^4 d^4 X}{2.3.4 dx^4} - \&c., \text{ minor}$$

iterum erit (13.), quam X . Igitur tam $\frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2 dx^2}$

$$+ \frac{\varphi^3 dddX}{2.3 dx^3} + \frac{\varphi^4 d^4 X}{2.3.4 dx^4} + \&c., \text{ quam } - \frac{\varphi dX}{dx}$$

$$+ \frac{\varphi^2 ddX}{2 dx^2} - \frac{\varphi^3 dddX}{2.3 dX^3} + \frac{\varphi^4 d^4 X}{2.3.4 dx^4} - \&c. \text{ nega-}$$

tiva quantitas erit. Id vero neutiquam eveniret, nisi

foret $\frac{\phi dx}{dx} = 0$; propterea quod posita ϕ in immensum

minore quantitate qualibet data, & consequenter evanescentibus prae ipsa ϕ potestatibus altioribus ϕ^2 , ϕ^3 ,

&c., series $\frac{\phi dX}{dx} + \frac{\phi^2 ddX}{2 dx^2} + \frac{\phi^3 dddX}{2.3 dx^3} + \frac{\phi^4 d^4 X}{2.3.4 dx^4}$

+ &c. contrahitur in unicum terminum $\frac{\phi dX}{dx}$, simili-

terque series $-\frac{\phi dX}{dx} + \frac{\phi^2 ddX}{2 dx^2} - \frac{\phi^3 dddX}{2.3 dx^3} + \&c.$

redigitur ad terminum unicum $-\frac{\phi dX}{dx}$; quorum ter-

minorum $+\frac{\phi dX}{dx}$, $-\frac{\phi dX}{dx}$ alter semper est affirma-

tivus, alter semper negativus. Ergo in casu *Maximi*

proveniet semper $\frac{\phi dX}{dx}$, seu $\frac{dX}{dx} = 0$.

Sit 2.^o x talis, qualem postulat valor *Minimus* Functionis X , ita ut si augeatur, ac minuatur ipsa x quantitate infinitesima ϕ , valor uterque Functionis X , ex positione $x + \phi$, & $x - \phi$ pro x , resultans, hoc est

$$(1.) X + \frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2 dx^2} + \frac{\varphi^3 dddX}{2.3 dx^3} + \&c., \text{ nec}$$

$$\text{non } X - \frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2 dx^2} - \frac{\varphi^3 dddX}{2.3 dx^3} + \frac{\varphi^4 d^4X}{2.3.4 dx^4}$$

— &c. major fit (13.), quam X . Ergo tam series

$$\frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2 dx^2} + \frac{\varphi^3 dddX}{2.3 dx^3} + \&c., \text{ quam series}$$

$$\text{altera } - \frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2 dx^2} - \frac{\varphi^3 dddX}{2.3 dx^3} + \&c. \text{ va-}$$

lorem exhibebit positivum; quod tamen fieri nequit,

nisi ponatur $\frac{\varphi dX}{dx} = 0$, quum series prior aequetur so-

li $\frac{\varphi dX}{dx}$, posterior soli $-\frac{\varphi dX}{dx}$, quorum quidem valo-

rum alter est necessario affirmativus, alter necessario

negativus. Igitur etiam in casu *Minimi* fiet $\frac{dX}{dx} = 0$.

Facta itaque $\frac{dX}{dx} = 0$, aequationis hujus radices, seu

valores x inde eruti, & in expressione X subroga-
ti, *Maximum*, *Minimumve* (si quis erit) Functioni X
valorem inducent.

Ut autem nunc dispiciatur quandonam Functionis X valor *Maximus* erit, quandonam *Minimus*, quandonam neuter (nam & hoc fieri potest), attendenda ser-

dulo est series (B) $\pm \frac{\varphi dX}{dx} + \frac{\varphi^2 ddX}{2 dx^2} \pm \frac{\varphi^3 dddX}{2.3 dx^3}$

$+ \frac{\varphi^4 d^4 X}{2.3.4 dx^4} \pm \frac{\varphi^5 d^5 X}{2.3.4.5 dx^5} + \&c.$ respondens du-

plici positioni $x \pm \varphi$ pro x . Si secundus seriei ter-

minus $\frac{\varphi^2 ddX}{2 dx^2}$, substituendo valorem $\tau \tilde{x}$ erutum ex

aequatione $\frac{dX}{dx} = 0$, prodeat negativus, adeoque & ne-

gativum valorem exhibeat fluxio secunda $\frac{ddX}{dx^2}$ (posita

femper dx constante), Functionis X valor *Maximus* erit, ob valorem nimirum negativum totius seriei (B), quae evanescente primo termino, & reliquis post secundum in immensum prae ipso decrescentibus ad solum secundum terminum redigitur.

Contra Functionis X valor *Minimus* erit, si secun-

dus seriei terminus $\frac{\varphi^2 ddX}{2 dx^2}$, adeoque & secunda flu-

xio $\frac{ddX}{dx^2}$ positivum valorem praebeat ex substitutione radice aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$; hinc enim fiet, ut series tota (B), quae uni secundo termino aequivalet, valorem obtineat positivum.

At vero Functionis X valor neque *Maximus* erit, neque *Minimus*, si secundus ipse terminus $\frac{\varphi^2 ddX}{2 dx^2}$, seu

$\frac{ddX}{dx^2}$ substituta radice aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$ evadat ni-

hilo aequalis, dummodo per eandem substitutionem una cum secundo non evanescat quoque tertius seriei

terminus $\pm \frac{\varphi^3 dddX}{2.3 dx^3}$: Quippe nulescente ex hypo-

thesi secundo termino, ac subsistente tertio tota series ob terminos reliquos post tertium in infinitum prae ipso decrecentes aequipollet tantummodo eidem tertio, qui cum ex duplici positione $x + \varphi$, & $x - \varphi$

loco τx duplicem praeseferat valorem $\pm \frac{\varphi^3 dddX}{2.3 dx^3}$,

alterum scilicet necessario positivum, alterum necessario negativum, seriei ipsi (B) binos oppositos valores

inducit. Hoc autem repugnat cum *Maximi*, tum *Minimi* indoli, quorum illud exigit, ut valor uterque seriei (*B*) ex positione $x + \varphi$, & $x - \varphi$ pro x oriundus sit negativus; istud vero postulat, ut uterque ipse valor sit positivus.

Quod si contingat, ut per substitutionem radicis

aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$ una cum secundo seriei (*B*) ter-

mino tertius quoque nullescat, criterium petendum

erit ex termino quarto $\frac{\varphi^4 d^4 X}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4}$, vel etiam ex quarta

fluxione $\frac{d^4 X}{dx^4}$, quae nimirum, si per substitutionem

praedictae radicis valorem praeferat negativum, indicabit *Maximum*; si valorem induat positivum, indicabit *Minimum*; si valorem praebeat nihilo aequalem, dum-

modo subsequens terminus quintus $\pm \frac{\varphi^5 d^5 X}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 dx^5}$ fa-

cta eadem substitutione non evanescat simul, neque *Maximum*, neque *Minimum* indicabit.

Ac si quintus ipse seriei terminus $\pm \frac{\varphi^5 d^5 X}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 dx^5}$

per substitutionem valoris $\tau_8 x$ ex aequatione $\frac{dX}{dx} = 0$

eruti evanescat una cum quatuor terminis praecedentibus, legem ac normam dabit subsequens terminus sextus

tus $\frac{\varphi^6 d^6 X}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 dx^6}$, ad quem unice (dummodo & is

non evanescat) series tota (B) reducitur, terminis reliquis post sextum in infinitum prae ipso imminutis. Valor quippe negativus ejus termini functionem X de more *Maximam* arguet; positivus *Minimam*; nullefcens, neque *Maximam*, neque *Minimam*, permanente tamen

termino septimo $\pm \frac{\varphi^7 d^7 X}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 dx^7}$ alternatim positivo, ac negativo.

Nam si & terminus septimus una cum praecedentibus per substitutionem valoris $\tau_8 x$ prodeat nihilo

aequalis, ex octavo termino $\frac{\varphi^8 d^8 X}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 dx^8}$ peten-

da erit norma; qui sane terminus si per illam substitutionem oriatur negativus, Functio X habebitur de more *Maxima*; si positivus, *Minima*: si prodeat nullus subsistatque terminus nonus alterna vice positivus, &

negativus $\pm \frac{\phi^2 d^2 X}{2.3.4.5.6.7.8.9 dx^2}$, Functio X neque

Maxima erit, neque *Minima*.

Par erit in sequentibus ratiocinatio, cujus unicum fundamentum est, quod series (B) negativa esse debet pro valore *Maximo* Functionis X ; positiva pro *Minimo*; alternis positiva, & negativa pro neutro.

Igitur Functio X *Maxima* erit, vel *Minima*, si seriei (B) termini successivi, simul evanescentes, fuerint numero impares, sive unus, sive tres, sive quinque &c; *Maxima* quidem, ubi seriei (B) terminus post ultimum evanescentem superstes prodeat negativus, *Minima* si positivus. At nec *Maxima* erit, nec *Minima*, ubi successivi termini simul evanescentes seriei ejusdem sint numero pares, nimirum vel bini, vel quatuor, vel sex, &c.

Allata est ergo methodus inveniendi valores *Maximos*, *Minimosque* Functionis $X = P$; traditum criterium distinguendi inter utrosque, hosque ab illis internoscendi; proposita demum norma ipsorum etiam absentiam dignoscendi. *Q. E. I.*

SCHOLIUM I.

16. Hinc luculentissime patet, aequationem $\frac{dX}{dx} = 0$ semper necessario locum habere quoties Functio

X Maximum aliquem, Minimumve valorem adipiscitur; at simul etiam patet, haudquaquam veram esse propositionem conversam, Maximum scilicet, vel Minimum aliquem valorem Functioni *X* semper necessario

inesse quando aequatio $\frac{dX}{dx} = 0$ locum habet. Nam si

una cum fluxione hac prima Functionis *X* evanescat, per substitutionem valoris τx inde hausti, fluxio quoque secunda; aut cum hisce duabus evanescat tertia simul, & quarta; aut cum istis quatuor quinta etiam, & sexta; sicque numerus par quicumque fluxionum successivarum annihiletur, Functio *X* nec Maximum ullum, nec Minimum valorem exhibebit, quan-

tumvis aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$ radices in ipsa *X* satagas

subrogare. Itaque dupliciter offendit vulgata methodus plerorumque Geometrarum, magni oppido nominis, ac de Mathesi alias praeclare meritorum, qui aequatio-

nem unicam $\frac{dX}{dx} = 0$ normam statuunt ac regulam de-

regendi Maxima, ac Minima. Ea quippe aequatio 1.^o nec semper, nec necessario Maximum, Minimumve indicat; nec 2.^o Maximis, Minimisque a se invicem distinguendis par est. Ita si proponatur ex. gr. functio $X = x^2$

$-(3a+b)x^3 + (3a^2+3ab)x^2 - (a^3+3a^2b)x + ba^3$, cujus investigandi sint valores *Maximi*, *Mini-*

mive; facta $\frac{dX}{dx} = 0$, feu $4x^3 - (9a+3b)x^2$

$+ (6a^2+6ab)x - a^3 - 3a^2b = 0$, feu x^3

$-\frac{(9a+3b)x^2}{4} + \frac{(6a^2+6ab)x}{4} - \frac{a^3+3a^2b}{4}$

$= 0$, ex hujus aequationis resolutione prodeunt ipsius

radices a , a , $\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b$. Neque tamen propterea radix

a in Functione X substituta Maximum, Minimumve va-

lorem eidem inducit: ex hac quippe substitutione ori-

tur $X = 0$; valor autem hunc proxime antecedens,

ponendo $a - \omega$ pro x , est $-(a-b-\omega)\omega^3$, ac

valor eum proxime subsequens, posito $a + \omega$ loco x ,

est $(a-b+\omega)\omega^3$, quorum prior, imminuto in im-

menfum ω , est idem cum $-(a-b)\omega^3$, alter cum

$(a-b)\omega^3$, sive alter necessario positivus, alter ne-

gativus, nimirum hic minor valore intermedio $X = 0$,

ille major; ac proinde valor ipse intermedius $X = 0$

nec Maximus esse potest, nec Minimus (13); quod a

vulgari methodo incertum relinquitur. Id vero ipsum

luculenter indicat superior methodus, quum secunda

fluxio $\frac{ddX}{dx^2} = 12x^2 - (18a+6b)x + 6a^2+6ab$

per substitutionem $\tau\tilde{x}$ a loco x evanescat, tertia autem

fluxio $\frac{dddX}{dx^3} = 24x - 18a - 6b$ per eandem sub-

stitutionem haudquaquam evanescat abiens in $6a - 6b$, quae assumptis, ut supponimus, a , & b inaequalibus nequit esse nihilo aequalis. Si praeterea in Functione

X loco $\tau\tilde{x}$ x radix tertia $\frac{a+3b}{4}$ aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$

subrogetur, abit functio ipsa in $-\frac{x}{3} \left(\frac{3b-3a}{4} \right)^4$,

qui fane valor Maximus, an Minimus, an neuter sit, per vulgarem methodum non fit manifestum; adhibito autem criterio superiori statim liquet, valorem hunc

Minimum esse ob secundam fluxionem $\frac{ddX}{dx^2} = \frac{36}{16} \times$

$(a-b)^2$ positivam. Vel ex hoc unico exemplo perspicue intelligitur, quantum vulgari praestet methodus in antecedenti Problemate exposita ac demonstrata, quae & simplicissima est, & certissimis innixa principiis, & evidentissimis notionibus deducta, & ad quantitates functionesque omnium generum latissime patens.

Caeterum quum functio quaelibet quantitatis variabilis x per Curvae alicujus ordinatam rite exprima-

tur, ut Geometrae compertum habent, hinc est, ut universalis Maximorum ac Minimorum methodus cum Problemate inveniendi Maximas, Minimasque Curvarum ordinatas undequaque consentiat. Manifestum porro est ex Curvarum indole ac genesi, ordinatae Maximae respondere radium osculi, seu Evolutae positivum, Minimae negativum: Cumque, assumpta ordinata X , ac fluente aequabiliter abscissa x , radii osculatoris

formula sit $\left(1 + \frac{dX^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}$, quae existente X Maxi-

$$\frac{-ddX}{dx^2}$$

ma, aut Minima, adeoque $\frac{dX}{dx} = 0$, abit in $-\frac{dx^2}{ddX}$,

erit propterea quantitas $-\frac{dx^2}{ddX}$ positiva in hypothese

ordinatae Maximae, negativa in hypothese Minimae, & consequenter ddX negativa pro Maxima ordinata, seu pro valore Maximo functionis X , positiva pro Minima ordinata, seu pro Minimo valore functionis ejusdem; prorsus ut supra.

SCHOLIUM II.

17. Posita generatim functione integra X , seu $P = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + Hx^7 + \&c.$, cujus Maxima ac Minima determinan-

tur per radices aequationis $\frac{dP}{dx} = 0$, seu $B + 2Cx$

$+ 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + 6Gx^5 + 7Hx^6 + \&c. = 0$, si hujus aequationis radices reales, & inaequales secundum ordinem magnitudinis dispositae dicantur, $a, b, c, e, f, \&c.$, sitque adeo $a > b, b > c, c > e, e > f, \&c.$, harum unaquaeque functioni P valorem Maximum, vel Minimum tribuet. Etenim posito

V pro factore aequationis $\frac{dP}{dx} = 0$ radices imagina-

rias, si quae sunt, involvente, habebitur $\frac{dP}{dx} = (x-a) \times$

$(x-b)(x-c)(x-e)(x-f) \dots V = 0$; ac pro-

inde $\frac{ddP}{dx^2} = (x-b)(x-c)(x-e)(x-f) \dots V$
 $+ (x-a)(x-c)(x-e)(x-f) \dots V$
 $+ (x-a)(x-b)(x-e)(x-f) \dots V$
 $+ (x-a)(x-b)(x-c)(x-f) \dots V$
 $+ (x-a)(x-b)(x-c)(x-e) \dots V$

$$+ \dots + (x-a)(x-b)(x-c)(x-e)(x-f) \dots \times$$

$\frac{dV}{dx}$: In hac porro aequalitate substituendo 1.^o a loco

$$\tau x \text{ oritur } \frac{ddP}{dx^2} = (a-b)(a-c)(a-e)(a-f) \dots M$$

(abeunte V in M ex illa substitutione); qui fane valor, ob M semper positivum, & factores $a-b$, $a-c$, &c. pariter positivos, nequit non esse positivus: Atque hinc radix prima, seu maxima a valorem Minimum functioni P largietur (15.). Substituatur 2.^o in eadem

$$\frac{ddP}{dx^2} \text{ radix secunda } b \text{ pro } x; \text{ fiet } \frac{ddP}{dx^2} = (b-a)(b-c) \times$$

$(b-e)(b-f) \dots V$, quae ob factorem unum $b-a$ negativum, reliquos autem positivos negativa est, indicatque iccirco (15.) functionem P Maximam oriri ex radice secunda b . Ponatur 3.^o pro x radix tertia c ; pro-

$$\text{dibit } \frac{ddP}{dx^2} = (c-a)(c-b)(c-e)(c-f) \dots V, \text{ seu}$$

positiva ob factores duos $c-a$, $c-b$, negativos, & reliquos positivos. Itaque radix tertia c functionem P Minimam reddit (15.). Substituatur 4.^o radix quarta e ;

$$\text{orietur } \frac{ddP}{dx^2} = (e-a)(e-b)(e-c)(e-f) \dots V, \text{ hoc}$$

est negativa ob priores tres factores negativos, reliquos positivos; proindeque radix quarta e functionem P Maximam praebet. Substituta 5.^o similiter radice quinta

f , abit $\frac{ddP}{dx^2}$ in $(f-a)(f-b)(f-c)(f-e)\dots V$,

quae ob factores quatuor priores negativos, reliquos autem positivos quantitas est positiva, arguitque propterea (15.) functionis P valorem, ex quinta radice f oriundum, Minimum fore. Eadem porro ratiocinatione inveniemus, tot haberi valores Maximos, Minimosque in functione P , quot habentur radices reales

& inaequales in aequatione $\frac{dP}{dx} = 0$; ita quidem, ut

facta radicum ipsarum distributione secundum ordinem quantitatis earundem, primumque locum maxima, postremum minima occupante, ac caeteris ordinatim loca intermedia tenentibus, radices omnes locorum imparium, prima, tertia, quinta &c. Functionem P Minimam exhibeant, radices autem locorum parium, secunda, quarta, sexta, &c. Maximam praebeant. Id ipsum quoque demonstrabitur, ubi radicum inaequalium a, b, c, e, f , &c. aliquae, vel etiam omnes negativae fuerint. Si enim ex. gr. e , & f negativae accipiantur, hoc

est $-e, -f$, sitque ratione distributionis $-e > -f$, ac propterea $f > e$; in allatis expressionibus valorum for-

mulae $\frac{ddP}{dx^2}$ mutabuntur ubique signa quantitatum $e, \& f$,

semperque adhibito examine deprehendetur ipsius $\frac{ddP}{dx^2}$

valor positivus ex prima radice, negativus ex secunda, positivus iterum ex tertia, negativus ex quarta, &c.; prorsus ut ante.

At si aequatio $\frac{dP}{dx} = 0$ radices habeat aequales

numero n , ita ut factor unus aequationis ipsius sit $(x-h)^n$ designante h radicem aequalem, factor vero alter, si ullus fuerit, radices inaequales, nec non imaginarias in-

volvens dicatur T , sitque propterea $\frac{dP}{dx} = 0 = (x-h)^n \cdot T$;

invenietur $\frac{ddP}{dx^2} = n(x-h)^{n-1} \cdot T + (x-h)^n \cdot \frac{dT}{dx}$;

$\frac{d^3P}{dx^3} = n \cdot n-1 \cdot (x-h)^{n-2} \cdot T + 2n(x-h)^{n-1} \cdot \frac{dT}{dx}$

$+ (x-h)^n \cdot \frac{ddT}{dx^2}$; $\frac{d^4P}{dx^4} = n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot (x-h)^{n-3} \cdot T$

$$+ 3n \cdot n - 1 \cdot (x-h)^{n-2} \cdot \frac{dT}{dx} + 3n(x-h)^{n-1} \cdot \frac{ddT}{dx^2}$$

$$+ (x-h)^n \cdot \frac{d^3 T}{dx^3} ; \frac{d^5 P}{dx^5} = n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot (x-h)^{n-4} \cdot T$$

$$+ 4n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot (x-h)^{n-3} \cdot \frac{dT}{dx} + 6n \cdot n - 1 \cdot (x-h)^{n-2} \times$$

$$\frac{ddT}{dx^2} + 4n(x-h)^{n-1} \cdot \frac{d^3 T}{dx^3} + (x-h)^n \cdot \frac{d^4 T}{dx^4} ; \text{at-}$$

que ita porro innotescet, fluxionem $(n+1)$:^{esimam} ipsius P ,

feu $\frac{d^{n+1} P}{dx^{n+1}}$ constare ex primo termino $n(n-1)(n-2) \times$

$(n-3)(n-4)(n-5) \dots (x-h)^{n-n} \cdot T$, feu $n(n-1) \times$
 $(n-2)(n-3) \dots T$, ex secundo termino habente
 factorem $x-h$, ex tertio termino habente factorem
 $(x-h)^2$, ex quarto, cujus factor erit $(x-h)^3$, deni-

que ex ultimo adaequate $\frac{(x-h)^n d^n T}{dx^n}$. Subrogata nunc

in hisce fluxionis $\frac{d^{n+1} P}{dx^{n+1}}$ terminis radice h pro x , eva-

nescunt omnes praeter primum, abeunte $\frac{d^{n+1} P}{dx^{n+1}}$ in

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \dots T$. Itaque jam

fit manifestum, per radicem aequalem h Maximum aliquem, Minimumve valorem functionis P obtineri (15.),

si fluxio $\frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}}$ post ultimam evanescentem superstes

fuerit ordinis paris, hoc est si numerus n impar fuerit; contra vero functionem P nec Maximam, nec Minimam oriri, ubi fluxio illa gradum imparem habuerit, & consequenter numerus n fuerit par. Hinc porro

palam est, quoties aequatio $\frac{dP}{dx} = 0$ radices aequales

habeat numero impares, tres, quinque, septem, &c., functionem P ex substitutione radice ejusdem aequalis fieri vel Maximam, vel Minimam; ac vicissim quotiescumque praedicta aequatio parem numerum complectatur radicum aequalium, duas, quatuor, sex, &c. functionem P ex illa substitutione nec Maximam, nec Minimam evadere.

Quod si fuerit vel factor $T = 1$, vel idem T complectatur radices tantum imaginarias; seu quod idem

est, si aequationis $\frac{dP}{dx} = 0$ radices omnes vel fuerint

reales & aequales, vel reliquae praeter aequales ipsas fuerint imaginariae, praebabit utroque casu radix aequa-

lis valorem Minimum functionis P , supposito impari radicum omnium numero; supposito autem hoc numero pari functio P nec Minima evadet, nec Maxima. Nam existente n numero pari (quo in casu ex demonstratis functio P nec Maxima fieri potest, nec Minima), par quoque esse debet numerus radicum om-

nium aequationis $\frac{dP}{dx} = 0$, quum reliquarum radicum

imaginariarum in factore T contentarum nonnisi par numerus esse possit, uti ex Algebra constat. Itaque nullum erit Maximum, neque Minimum functionis P , si

par fuerit numerus radicum omnium aequationis $\frac{dP}{dx}$

$= 0$ continentis radices tantum aequales, & reliquas imaginarias. Contra vero, ubi radicum aequalium numerus impar fuerit, atque adeo impar numerus radicum omnium additis scilicet reliquis imaginariis factoris T semper numero paribus, Minima oritur functio P ex substitutione radicis aequalis (15.) ob valorem

affirmativum fluxionis paris $\frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}} = n(n-1)(n-2) \times$

$(n-3)(n-4)(n-5) \dots T$, in qua factor T ex substitutione quantitatis cujuscvis pro x nunquam non invenitur affirmativus.

Eadem omnino demonstratione conficitur, supposi-

ta $\frac{dP}{dx} = 0 = (x-g)^m (x-h)^n (x-l)^r \dots T$, hoc est

datis in aequatione $\frac{dP}{dx} = 0$ radicibus aequalibus g nu-

mero m , aequalibus radicibus h numero n , aequalibus radicibus l numero r , &c., caeterisque inaequalibus, & imaginariis in factore T contentis, radices ipfas g , h , l , &c. valorem Maximum, Minimumve functioni P conciliare, si earum numeri m , n , r , &c. impares fuerint; neutrum dare, si pares. Huc usque dicta in radices aequales positivas perinde ac negativas admissim quadrare, notum est quam quod maxime. Neque minus perspicuum est, facta simul radicum omnium aequalium & inaequalium distributione secundum ordinem quantitatis radices omnes locorum imparium (sive aequales eae fuerint, sive inaequales) functionem P Minimam exhibere, locorum parium Maximam, ubi tamen radices aequales numero impares fuerint, paribus scilicet neutrum praebentibus.

18. Ex haecenus demonstratis sequentes Canones eximiae utilitatis, maximique usus deducuntur.

C A N O N I.

Ad Maxima, aut Minima Functionis X detegenda fluxionem ejus primam $\frac{dX}{dx}$ nihilo aequalem ponito, hujusque radices loco x in functione illa subrogato: tum facta eadem substitutione in fluxione secunda $\frac{ddX}{dx^2}$ accidet, ut vel 1.^o ejus valor prodeat negativus; vel 2.^o oriatur affirmativus; vel 3.^o sit nullus, nec talis sit tamen fluxionis tertiae $\frac{dddX}{dx^3}$ valor ex illa substitutione proveniens. Si primum contingat, functionem X Maximam credito, si alterum, Minimam; si tertium, nec Maximam, nec Minimam judicato.

C A N O N II.

19. At si tertiae quoque fluxionis $\frac{dddX}{dx^3}$ valor ex eadem substitutione evanescat, ex quarta fluxione $\frac{d^4X}{dx^4}$ criterium petito; ex hujus nimirum valore negativo functionem X Maximam reputato, ex affirmativo Mi-

nimam, ex nullo (dummodo non evanescat simul fluxio quinta $\frac{d^5 X}{dx^5}$) nec Maximam, nec Minimam habeto.

C A N O N III.

20 In universum, si fluxionum successivarum functionis X numerus impar quicumque evanescat, functionem ipsam X vel Maximam, vel Minimam pronunciato; Maximam, si fluxionis superstitis post ultimam evanescentem valor fuerit negativus; Minimam, si affirmativus.

C A N O N IV.

21. At nec Maximam, nec Minimam functionem X habeto, si fluxionum ipsius successivarum numerus par quicumque nihilo aequalis oriatur.

C A N O N V.

22. Si aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$ radices omnes reales secundum ordinem magnitudinis disponantur, primusque locus maximae, postremus minimae tribuatur, locaque intermedia a radicibus intermediis ordinatim occupentur, functionem X oriri Maximam pro certo habeto ex radicibus inaequalibus locorum parium, Minimam ex

radicibus inaequalibus locorum imparium; idemque judicato de radicibus aequalibus ejusdem speciei ubi tamen ipsarum numerus impar fuerit.

PROBLEMA II.

Invenire Maxima, aut Minima functionis integrae $X = PQ$.

SOLUTIO.

Patet ex praecedenti Problemate, Maxima aut Minima, si quae sunt, functionis X , seu PQ per radices

aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$, seu $\frac{PdQ + QdP}{dx} = 0$ indubi-

tanter obtineri. Maxima autem fiet functio PQ , si flu-

xio secunda $\frac{ddX}{dx^2}$, seu $\frac{PddQ + 2dPdQ + QddP}{dx^2}$

negativa fuerit; Minima, si affirmativa; nec Maxima vero, nec Minima, si fluxio eadem nullefcet, per-

maneatque fluxio tertia $\frac{d^3X}{dx^3}$, hoc est

$\frac{Pd^3Q + 3dPd^2Q + 3d^2PdQ + Qd^3P}{dx^3}$, ficque

porro per Probl. praec. pronum erit inferre, functio-

nem PQ Maximam fore, ubi evanescente numero quovis impari fluxionum successivarum functionis ipsius fluxio subsequens negativa deprehendatur; Minimam; ubi haec prodeat affirmativa; at neque Maximam, neque Minimam, ubi numerus fluxionum earundem evanescentium fuerit par. *Q. E. I.*

S C H O L I O N.

24. Calculum ineunti constabit, fluxionem quartam ipsius PQ fore $Pd^4Q + 4dPd^3Q + 6d^2Pd^2Q + 4d^3PdQ + Qd^4P$, fluxionem quintam prodire $Pd^5Q + 5dPd^4Q + 10d^2Pd^3Q + 10d^3Pd^2Q + 5d^4PdQ + Qd^5P$. Hinc ad fluxionem n^{esimam} functionis PQ obtinendam sat erit series binas ordinare

$P, dP, d^2P, d^3P, d^4P, d^5P, \dots, d^n P$
 $d^n Q, d^{n-1}Q, d^{n-2}Q, d^{n-3}Q, d^{n-4}Q, d^{n-5}Q, \dots, Q$, ac
 unius terminos per terminos alterius infra sibi respondentes multiplicare, productisque singulis praefigere coefficientes binomii Newtoniani ad potestatem n elevati. Ita fluxio n^{esima} functionis PQ fiet $Pd^n Q + ndPd^{n-1}Q$

$$+ \frac{n \cdot n - 1}{2} \cdot d^2 P d^{n-2} Q + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} \cdot d^3 P d^{n-3} Q$$

$$+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} d^4 P d^{n-4} Q$$

+ + $Qd^n P$. Eadem ratiocinatione licebit demonstrare, fluxionem n^{esimam} functionis PQR esse $Pd^n \cdot QR + ndPd^{n-1} \cdot QR$

$$+ \frac{n \cdot n - 1}{2} \cdot d^2 Pd^{n-2} \cdot QR + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} \times$$

$$d^3 Pd^{n-3} \cdot QR + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot d^4 Pd^{n-4} \cdot QR$$

$$+ \dots QR d^n P, \text{ ubi } d^n \cdot QR, d^{n-1} \cdot QR, d^{n-2} \cdot QR,$$

&c. indicant fluxiones n^{esimam} , $(n-1)^{\text{esimam}}$,

$(n-2)^{\text{esimam}}$ functionis QR prius inventas. Haud diffi-

mili methodo innotescet fluxionem n^{esimam} functionis

$PQRT \dots$ ex quolibet factorum numero coalescentis prodi-

$$\text{re } Pd^n \cdot QRT \dots + ndPd^{n-1} \cdot QRT \dots + \frac{n \cdot n - 1}{2} \times$$

$$d^2 Pd^{n-2} \cdot QRT \dots + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} \cdot d^3 Pd^{n-3} \cdot QRT \dots$$

$$+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot d^4 Pd^{n-4} \cdot QRT \dots$$

$$\dots + QRT \dots d^n P.$$

P R O B L E M A III.

25. Functionis $X = PQRT\dots$ Maxima, aut Minima determinare.

S O L U T I O .

Juxta superius demonstrata, radices aequationis $\frac{dX}{dx}$
 $= 0$, hoc est

$$\frac{PQR\dots dT + PQT\dots dR + PRT\dots dQ + QRT\dots dP}{dx}$$

$= 0$ Maxima, aut Minima functionis $PQRT\dots$ sup-
 peditabunt; Maximum quidem, si secunda fluxio ipsius
 $PQRT\dots$ negativa prodierit; Minimum, si affirmati-
 va; neutrum, si nulla, subsistente fluxione tertia ipsius
 $PQRT\dots$ At si una cum fluxione secunda haec quo-
 que tertia evanescat, ad criterium jam ante traditum
 semper erit confugiendum, eaque regula constantissime
 observanda. Fluxiones autem cujuscumque gradus ipsius
 functionis $PQRT\dots$ per regulam in Schol. Problema-
 tis praecedentis inventam expedite & commode eruen-
 tur. Patet ergo propositum. Q. E. I.

P R O B L E M A IV.

26. Functionis $X = P^p$ valores Maximos Mini-
 mosve investigare.

S O L U T I O

Maximi, Minimive functionis P^p valores per radices aequationis $\frac{dX}{dx} = 0$, seu $\frac{p P^{p-2} dP}{dx} = 0$ de

more determinantur. Hinc divisa aequatione per $p P^{p-1}$,

radices hujus $\frac{dP}{dx} = 0$ Maximos, Minimove, si modo

adsint, functionis P^p valores praebebunt. Ut autem Maxima a Minimis internoscantur, considerare oportebit fluxionem secundam $\frac{dd X}{dx^2}$, seu $\frac{p \cdot p - 1 \cdot P^{p-2} dP^2}{dx^2}$

+ $\frac{p P^{p-1} dd P}{dx^2}$, in qua evanescente primo termino ob

$dP = 0$ solus superest secundus; qui iccirco si substituta radice prodit negativus, Maximam indicat functionem P^p ; si oritur affirmativus, indicat Minimam: atque ubi fuerit p numerus impar, seu $p P^{p-1}$ potestas

gradus paris, adeoque semper affirmativa, ex solo $\frac{dd P}{dx^2}$

Maximi, Minimique distinctio colligi poterit. At vero nec Maximus erit, nec Minimus functionis valor, si

evanescat terminus $\frac{p P^{p-1} ddP}{dx^2}$, permaneatque fluxio

tertia $\frac{ddd X}{dx^3}$, nimirum

$$\frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot P^{p-3} dP^3 + 3p \cdot p-1 \cdot P^{p-2} dP ddP + p P^{p-1} d^3 P}{dx^3},$$

hoc est $\frac{p P^{p-1} d^3 P}{dx^3}$, evanescente scilicet dP . Hacque

porro methodo ut prius (15.) pergendum erit. *Q. E. I.*

S C H O L I O N.

27. Ex aequatione $\frac{p P^{p-1} dP}{dx} = 0$ licet inferre,

functionis P^p valorem Minimum per radices aequatio-

nis $P = 0$ semper obtineri, si par fuerit numerus p ;

contra vero nec Maximum, nec Minimum si fuerit im-

par. Est quippe fluxio p :^{esima} ipsius P^p , ut supputanti in-

notescet, composita ex termino $\frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \cdot p-4 \dots 1 dP^p}{dx^p}$,

nec non ex aliis ordinatim ductis in P^{p-1} , P^{p-2} ,

P^{p-3} , P^{p-4} , P , qui propterea evanescunt om-

Q

nes praeter primum. Hinc (15.) functio P^p Maxima evadet vel Minima, si par fuerit numerus p , seu par fluxio superstes p :^{esima} functionis P^p : & quoniam ter-

mini illius primi $\frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot p-3 \dots 1 dP^p}{dx^p}$, vel

etiam $\frac{dP^p}{dx^p}$ valor non potest non esse affirmativus

ob potentiam parem fluxionis dP semper affirmativam; fiet iccirco P^p Minimum; at nec Maximum nec Minimum existente p impari.

PROBLEMA V.

28. Invenire Maxima, ac Minima functionis $P^p Q^q$.

SOLUTIO.

Nihilo aequata de more fluxione $\frac{dX}{dx} =$

$\frac{(qPdQ + pQdP)}{dx} \frac{P^{p-1} Q^{q-1}}{dx}$, erit quoque

$\frac{qPdQ + pQdP}{dx} = 0$, cujus adeo radices Maximum,

Minimumve functioni $P^p Q^q$ valorem inducent; Ma-

imum quidem, si fluxio secunda $\frac{ddX}{dx^2}$, quae evane-

fciente $\frac{qPdQ + pQdP}{dx}$ reducitur ad $P^{p-1} Q^{q-1} \times$

$\left(\frac{qP ddQ + pQ ddP + (p+q)dPdQ}{dx^2} \right)$, fuerit nega-

tiva; Minimum, si affirmativa; neutrum, si nulla, per-

manente fluxione tertia $\frac{dddX}{dx^3} = d^3 P^p Q^q = \&c.$ Ubi

autem p, q sint numeri impares, & consequenter P^{p-1} ,

Q^{q-1} potestates pares, valorisque iccirco affirmativi, ex sola

$\frac{qP ddQ + pQ ddP + (p+q)dPdQ}{dx^2}$ licebit Maximum

a Minimo internoscere. Q. E. I.

SCHOLIUM.

29. Ex formula $\frac{(qPdQ + pQdP) P^{p-1} Q^{q-1}}{dx}$

$= 0$ colligitur tum $P = 0$, tum $Q = 0$. Jam vero

posita $P = 0$, fluxio p:^{esima} functionis $P^p Q^q$ inito calcu-

lo invenitur $\frac{p \cdot p - 1 \cdot p - 2 \cdot p - 3 \cdot p - 4 \dots 1 Q^q dP^p}{dx^p}$,

terminis nimirum reliquis ob factores $P^p, P^{p-1},$

Q^2

$P^{p-2}, P^{p-3}, P^{p-4}, \dots, P$, quos comprehendunt, evanescentibus. Itaque (15.) aequationis $P = 0$ radices in functione $P^p Q^q$ subrogatae Maximum, Minimumve suppeditabunt functionis valorem, si numerus p par fuerit; neutrum, si impar: & quidem in ipsa hypothese p par habebitur Maximum, si Q^q negativa sit; Minimum, si affirmativa, quod semper continget ubi par fuerit potestas Q^q , seu numerus q . Eodem modo assumpta $Q = 0$, functionis $P^p Q^q$ fluxio ordinis q -simi, quae sola superest post omnes fluxiones praecedentes nihilo aequales, est

$$\frac{q \cdot q - 1 \cdot q - 2 \cdot q - 3 \cdot q - 4 \dots - 1 \cdot P^p dQ^q}{dx^q}, \text{ nullefcen-}$$

tibus scilicet fluxionis istius terminis caeteris per Q^q , Q^{q-1} , Q^{q-2} , Q^{q-3} , $\dots, Q$ multiplicatis. Igitur (15.) per radices aequationis $Q = 0$ Maxima, vel Minima functionis $P^p Q^q$ semper invenientur ubi fuerit q numerus par; ubi autem sit impar, nullum habebitur in functione illa Maximum Minimumve: utroque porro q , & p posito pari, ob valorem fluxionis praecedentis affirmativum Minima orietur functio $P^p Q^q$.

P R O B L E M A VI.

30. Functionis $P^p Q^q R^r T^t \dots$ Maximos, ac Minimos valores investigare.

S O L U T I O .

Facta $\frac{dX}{dx} = 0$, hoc est $P^{p+1} Q^{q+1} R^{r+1} T^{t+1} \dots \times$

$$\left(\frac{tPQR\dots dT + rPQT\dots dR + qPRT\dots dQ + pQRT\dots dP}{dx} \right)$$

$= 0$, hacque divisa per $P^{p+1} Q^{q+1} R^{r+1} T^{t+1} \dots$

obtinentur de more Maxima, ac Minima functionis propositae per radices aequationis

$$\frac{tPQR\dots dT + rPQT\dots dR + qPRT\dots dQ + pQRT\dots dP}{dx}$$

$= 0$: quae si dicatur M , ob $\frac{dX}{dx} = P^{p+1} Q^{q+1} R^{r+1} T^{t+1} \dots M$,

erit fluxio secunda $\frac{ddX}{dx^2}$ (neglectis terminis per M mul-

tiplicatis) aequalis quantitati $\frac{P^{p+1} Q^{q+1} R^{r+1} T^{t+1} \dots dM}{dx}$,

quae facta radice in locum $\sqrt{x}$ substitutione vel negativa prodibit, vel positiva, vel nulla: Si primum, functio $P^p Q^q R^r T^t \dots$ (15.) Maxima orietur; si alterum, Minima; si tertium (dummodo non evanescat simul fluxio subsequens tertia), nec Maxima erit, nec Minima. Quod si tertia quoque fluxio evanescat, judicium petendum erit ex quarta, uti ante adnotavimus, &c. Q. E. I.

S C H O L I O N.

31. Ex praecedenti aequatione $\frac{dX}{dx} = 0$, obtinetur

$$1.^{\circ} P = 0;$$

$$2.^{\circ} Q = 0;$$

$$3.^{\circ} R = 0;$$

$$4.^{\circ} T = 0; \&c.$$

Jam vero in hypothesi $P = 0$, subductis calculis palam fit, fluxionem p :^{estimam} functionis $P^p Q^q R^r T^t \dots$ substituta radice aequationis $P = 0$ pro x superstitem fore post praecedentes omnes nihilo aequales, eamque ipsam neglectis terminis in P ductis esse

$$\frac{p \cdot p - 1 \cdot p - 2 \cdot p - 3 \cdot p - 4 \dots 1 Q^q R^r T^t \dots dP^p}{dx^p};$$

ex quo infertur (15.), per substitutionem radicum aequationis $P = 0$ Maximam, aut Minimam evadere functionem $P^p Q^q R^r T^t \dots$, si fuerit p numerus par; neutram, si impar; ac Minimam speciatim, si etiam $q, r, t, \&c.$ pares fuerint. Rursus assumpta aequatione $Q = 0$, hujusque radicibus loco x substitutis in fluxionibus functionis praedictae, evanescere deprehenduntur fluxiones illae usque ad fluxionem q :^{estimam}, quae

invenitur aequalis ipsi $\frac{q \cdot q-1 \cdot q-2 \cdot q-3 \cdot q-4 \dots 1 P^p R^r T^t \dots dQ^q}{dx^q}$;

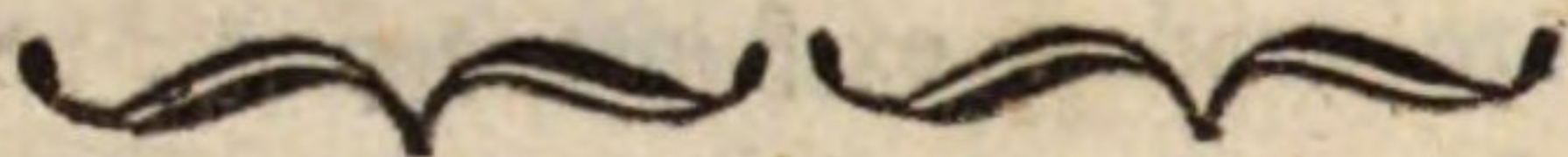
quae fane indicat, existente q impari, functionem $P^p Q^q R^r T^t \dots$ per substitutionem radicis erutae ex aequatione $Q = 0$ nec Maximam fieri, nec Minimam; alterutram vero evadere existente q pari, ac speciatim Minimam positis quoque reliquis p, r, t , &c. paribus. Ita etiam facta $R = 0$, captisque fluxionibus memoratae functionis successivis, substitutisque loco x radicibus aequationis $R = 0$, prodit fluxio r :^{esima}, quae fluxionum non evanescentium prima est,

$$\frac{r \cdot r-1 \cdot r-2 \cdot r-3 \cdot r-4 \dots 1 P^p Q^q T^t \dots dR^r}{dx^r};$$

haec porro functionem $P^p Q^q R^r T^t \dots$ Maximam aut Minimam arguit posito r numero pari, ac peculiariter Minimam positis etiam p, q, t , &c. paribus; neutram vero facto r impari. Denique eodem modo si accipiantur $T = 0$, huiusque aequationis radices substituantur in fluxionibus functionis praedictae, fluxio, quae prima superest praecedentibus aliis evanescentibus, est ordinis t :^{esimi}, eaque oritur

$$\frac{t \cdot t-1 \cdot t-2 \cdot t-3 \cdot t-4 \dots 1 P^p Q^q R^r \dots dT^t}{dx^t}.$$

Igitur (15.) & in hoc eventu functio $P^p Q^q R^r T^t \dots$; Maxima aut Minima evadit per radicis illius substitutionem, si t numerus fuerit par; ac si alii quoque p, q, r , &c. pares fuerint, functio Minima oritur; at neque Maxima fit neque Minima, si t fuerit impar.



P A R S II.

*De Maximis, ac Minimis Functionum
Rationalium Fractionum.*

P R Æ N O T A T I O.

32. **S**I per P, Q, R, T , &c., nec non F, G, H, L , &c. exprimantur functiones rationales integrae τ $\tilde{x}$ x , sintque p, q, r, t , &c., nec non f, g, h, l , &c. numeri integri, vel etiam nihilum; Functio nostra X (quam hic rationalem fractionem accipimus) ad sex haece formas revocari percommode poterit;

$$1^{\circ} X = \frac{P}{F};$$

$$2^{\circ} X = \frac{P Q}{F G};$$

$$3^{\circ} X = \frac{P Q R T \dots}{F G H L \dots};$$

$$4^{\circ} X = \frac{P^p}{F^f};$$

$$5^{\circ} X = \frac{P^p Q^q}{F^f G^g};$$

$$6^{\circ} X = \frac{P^p Q^q R^r T^t \dots}{F^f G^g H^h L^l \dots}.$$

P R O B L E M A I.

33. Maximum, Minimumve Functionis $X = \frac{P}{F}$ valorem determinare.

S O L U T I O.

Eadem, qua supra (15.), ratiocinatione fas cuique est demonstrare, Maxima, ac Minima Functionis $\frac{P}{F}$ elici oportere ex aequatione $\frac{dX}{dx}$, feu $d. \left(\frac{P}{F dx} \right)$

$= 0$, hoc est $\frac{F dP - P dF}{F^2 dx} = 0$. Hinc simplicius

oriatur $\frac{F dP - P dF}{dx} = 0$ huiusque aequationis radi-

ces loco $\tau \tilde{x}$ in Functione $\frac{P}{F}$ subrogatae Maximos,

Minimosve (si qui fuerint) eidem Functioni valores inducent. Ut autem Maxima a Minimis internoscantur,

per ratiocinationem ante institutam (15.) radices aequationis $F d P - P d F = 0$ substituendae sunt pro x in

$$\text{fluxione secunda } \frac{d d X}{d x^2} = d d. \left(\frac{P}{F d x^2} \right) =$$

$$d. \left(\frac{F d P - P d F}{F^2 d x^2} \right) = \frac{F d d P - P d d F}{F^2 d x^2}$$

$$- \frac{2 d F (F d P - P d F)}{F^3 d x^2} = (\text{ob evanescentem magni-}$$

$$\text{tudinem } F d P - P d F) \frac{F d d P - P d d F}{F^2 d x^2}; \text{ ita quidem}$$

$$\text{ut affirmativus valor fractionis } \frac{F d d P - P d d F}{F^2 d x^2}, \text{ vel}$$

folius numeratoris $F d d P - P d d F$ ex illa substitutione prodiens (neglecto denominatore quadrato F^2 semper affirmativo) indicet Minimum Functionis propositae, valor negativus ipsius $F d d P - P d d F$ designet Maximum Functionis ejusdem, & valor ipse nullescens [subsistente per eandem substitutionem fluxione

$$\text{tertia } d^3 \left(\frac{P}{F d x^2} \right)] \text{ nec Maximum innuat, nec Mi-}$$

nimum. Quod si nullescente fluxione secunda evanes-

$$\text{cat simul etiam tertia } d^3 \left(\frac{P}{F d x^2} \right) = d^2 \left(\frac{F d P - P d F}{F^2 d x^2} \right)$$

$$= d. \left(\frac{FddP - PddF}{F^2 dx^3} - \frac{2dF(FdP - PdF)}{F^3 dx^3} \right)$$

= (ob quantitates $FdP - PdF$, & $FddP - PddF$ ex hypothesi nihilo aequales)

$$\frac{Fd^3P + dFd^2P - dPd^2F - Pd^3F}{F^2 dx^3}, \text{ iudicium pe-}$$

tendum erit a fluxione quarta $d^4 \left(\frac{P}{F dx^4} \right) =$ (sup-

posita fluxionum praecedentium evanescencia)

$$\frac{Fd^4P + 2dFd^3P - 2dPd^3F - Pd^4F}{F^2 dx^4}, \text{ quae po-}$$

sitiva Minimum, negativa Maximum, nulla (dummodo subsistat fluxio subsequens quinta) neutrum indicabit.

At si per substitutionem illam evanescat quinta quoque

fluxio $d^5 \left(\frac{P}{F dx^5} \right)$, quae in hypothesi nullefcen-

tiae fluxionum antecedentium invenitur

$$= \frac{Fd^5P + 3dFd^4P + 2d^2Fd^3P - 2d^3Fd^2P - 3d^4FdP - Pd^5F}{F^2 dx^5};$$

criterium suppeditabit fluxio subsequens sexta

$d^6 \left(\frac{P}{F dx^6} \right)$, quae annihilatis antecedentibus prodit

$$= \frac{Fd^6P + 4dFd^5P + 5d^2Fd^4P - 5d^4Fd^2P - 4d^5FdP - Pd^6F}{F^2 dx^6}.$$

Hujus scilicet numerator positivus Minimum Functionis $\frac{P}{F}$ valorem declarabit, negativus Maximum, nullus (permanente fluxione septima) nec Maximum, nec Minimum significabit. Atque ita porro pergendum erit, prorsus ut supra (15.). Q. E. I.

S C H O L I O N.

34. Palam est paullo attentius rei penetralia rimantibus, fluxionem $(n+1)$:^{esimam} functionis X , seu

$\frac{P}{F}$, hoc est fluxionem n:^{esimam} $\tau_8 \frac{dX}{dx}$, seu ipsius

$\frac{FdP - PdF}{F^2 dx}$, posito quod fluxiones omnes antecessores annihilentur, aequalem fore ipsi $\frac{d^n FdP - d^n PdF}{F^2 dx}$.

Porro ad valorem τ_8 , $d^n FdP$ obtinendum, instituuntur per §. 24. binae series

$d^{n+1}P, d^n P, d^{n-1}P, d^{n-2}P, d^{n-3}P, d^{n-4}P, \dots dP$

$F, dF, d^2F, d^3F, d^4F, d^5F, \dots d^n F,$

earumque termini eadem loca occupantes ducuntur in se

invicem, ac productis singulis adscribuntur coefficientes Binomii Newtoniani ad potestatem n evecti. Ad habendum pariter valorem $\tau \tilde{g} d^n P d F$ binae efformantur series

$$d^n P, d^{n-1} P, d^{n-2} P, d^{n-3} P, d^{n-4} P, d^{n-5} P, \dots, P$$

$$d F, d^2 F, d^3 F, d^4 F, d^5 F, d^6 F, \dots, d^{n+1} F,$$

ac productis terminorum eadem loca occupantium prae-figuntur coefficientes memorati. Est itaque $d^n F d P$

$$= F d^{n+1} P + n d F d^n P + \frac{n \cdot n - 1 \cdot}{2} d^2 F d^{n-1} P$$

$$+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot}{2 \cdot 3} d^3 F d^{n-2} P + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot}{2 \cdot 3 \cdot 4} \times$$

$$d^4 F d^{n-3} P + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4 \cdot}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} d^5 F d^{n-4} P$$

$$+ \&c. \text{ Rursus est } - d^n P d F = - d F d^n P$$

$$- n d^2 F d^{n-1} P - \frac{n \cdot n - 1 \cdot}{2} d^3 F d^{n-2} P - \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot}{2 \cdot 3} \times$$

$$d^{n-3} P d^4 F - \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot}{2 \cdot 3 \cdot 4} d^{n-4} P d^5 F$$

$$- \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4 \cdot}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} d^{n-5} P d^6 F - \&c.$$

$$\begin{aligned}
\text{Igitur } d^n F d P - d^n P d F &= F d^{n+1} P + \frac{n}{-1} \left\{ d F d^n P \right. \\
&+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot}{2} \left. \right\} d^2 F d^{n-1} P \\
&+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot}{2 \cdot 3} \left. \right\} d^3 F d^{n-2} P \\
&+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left. \right\} d^4 F d^{n-3} P \\
&+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4 \cdot}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \left. \right\} d^5 F d^{n-4} P + \&c.
\end{aligned}$$

Facta porro terminorum reductione orietur

$$\begin{aligned}
\frac{d^n F d P - d^n P d F}{F^2 d x^{n+1}} &= [F d^{n+1} P + \frac{n}{-1} d F d^n P \\
&+ \frac{n \cdot n - 3 \cdot}{2} d^2 F d^{n-1} P + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 5 \cdot}{2 \cdot 3} d^3 F d^{n-2} P \\
&+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 7 \cdot}{2 \cdot 3 \cdot 4} d^4 F d^{n-3} P
\end{aligned}$$

$$+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} d^5 F d^{n-4} P$$

$$+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4 \cdot n - 11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} d^6 F d^{n-5} P$$

$$+ \&c.] : F^2 d x^{n+1} = \frac{d^{n+1} X}{d x^{n+1}} = d^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{P}{F d x^{n+1}},$$

posito tamen quod fluxiones omnes praecedentes evanescant. Seriem hanc terminorum satis concinnam & elegantem vocabimus W ; ex eaque (nulla habita ratione denominatoris F^2 semper affirmativi) petendum erit criterium Maximorum, Minimorumque functionis

propositae $\frac{P}{F}$. Haec nempe regula tenenda est: Pona-

tur in formula W , $n = 0$, & quantitas $F d P - d F d^0 P$,

seu $\frac{F d P - P d F}{d x}$, in quam formula abit, fiet nihilo

aequalis; hujusque quantitatis inveniantur radices; seu valores τx : Tum substituantur valores isti pro x in formula W facto $n = 1$; ac si evanescat per substitutionem formula ipsa, subrogentur iidem valores in W facto $n = 2$; sique iterum nullefcet W , fiat eadem substitutio in W , sumpto $n = 3$; ac si rursus oriatur W nihilo aequalis, substitutio eadem fiat in W , posito $n = 4$; sicque perpetuo donec ea occurrat formulae

W quantitas, quae minime evanescat. Jam vero si quantitati W non evanescenti respondeat numerus $n + 1$

impar, seu n par, caret functio $\frac{P}{F}$ Maximis, Minimif-

ve valoribus; si autem ipsi W non evanescenti respondere deprehendatur numerus $n + 1$ par, sive n impar,

in Functione $\frac{P}{F}$ datur Maximum aliquod, Minimumve,

primum videlicet quoties τ W valor oriatur negativus, alterum ubi ejusdem W prodeat valor affirmativus.

PROBLEMA II.

35. Invenire Maxima, ac Minima functionis $\frac{PQ}{FG}$.

SOLUTIO.

Ex aequatione $\frac{dX}{dx} = \frac{FG(PdQ + QdP) - PQ(FdG + GdF)}{F^2 G^2}$

$= 0$, sive ex solo numeratore $= 0$ eliciantur valores

τ x , qui in functione $\frac{PQ}{FG}$ subrogati Maximum, Mi-

nimumve (si ullus erit) eidem functioni valorem inducent. Ut Maxima a Minimis discernantur, accipien-

da est fluxio secunda $\frac{dd X}{dx^2}$, quae (in hypothese fluxio-
nis primae nullescentis) prodit

$$= \frac{FG(PddQ + 2dPdQ + QddP) - PQ(FddG + 2dFdG + GddF)}{F^2 G^2}$$

In hac, seu potius in ejus numeratore (ob denomina-
torem semper affirmativum) subrogatus valor ipsius x
quantitatem exhibebit vel affirmativam, vel negativam,

vel nullam; & in primo eventu functionem $\frac{PQ}{FG}$ Mi-

nimam, in altero Maximam, in postremo neutram
(permanente tamen fluxione tertia) indicabit. Evane-
scente autem & tertia functionis datae fluxione, con-
fugiendum est ad quartam; sicque porro pergendum,
ut ante. Q. E. I.

S C H O L I O N.

36. Attendenti perspectum est, fluxionem $(n+1)$:^{esimam}

$\frac{PQ}{FG}$, seu n:^{esimam} ipsius $d. \frac{PQ}{FG}$ (posito quod flu-

xiones omnes antecedentes evanescant) esse (24.)

R

$$\begin{aligned}
& \frac{d^n [FG(PdQ + QdP)] - d^n [PQ(FdG + GdF)]}{F^2 G^2} \\
&= [FG d^n (PdQ + QdP) + nd.FG d^{n-1} (PdQ + QdP) \\
&+ \frac{n \cdot n-1}{2} d^2 FG d^{n-2} (PdQ + QdP) + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} \times \\
&d^3 FG d^{n-3} (PdQ + QdP) + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\
&d^4 FG d^{n-4} (PdQ + QdP) + \&c. \dots\dots\dots - PQ \times \\
&d^n (FdG + GdF) - nd.PQ d^{n-1} (FdG + GdF) - \frac{n \cdot n-1}{2} \times \\
&d^2 PQ d^{n-2} (FdG + GdF) - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} d^3 PQ \times \\
&d^{n-3} (FdG + GdF) - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} d^4 PQ \times \\
&d^{n-4} (FdG + GdF) - \&c. \dots\dots\dots] : F^2 G^2 = (\text{voca-} \\
&\text{do } A \text{ hujus quantitatis numeratorem}) \frac{A}{F^2 G^2}. \text{ Porro in} \\
&\text{magnitudine } A \text{ fluxiones quaelibet ipsius } FG \text{ expedi-} \\
&\text{tissime habentur per num. 24.; fluxiones autem n:}^{\text{esima}}, \\
&(n-1):^{\text{esima}}, (n-2):^{\text{esima}}, (n-3):^{\text{esima}} \text{ r8}
\end{aligned}$$

$(PdQ + QdP)$ sequenti modo per seriem elegantissimam determinantur: Est $d^n (PdQ + QdP) = d^n PdQ = d^n QdP$.

$$= (34.) Pd^{n+1}Q + ndPd^nQ + \frac{n \cdot n-1}{2} d^2 Pd^{n-1}Q$$

$$+ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} d^3 Pd^{n-2}Q + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \times$$

$$d^4 Pd^{n-3}Q + \&c. + dPd^nQ + nd^2Pd^{n-1}Q$$

$$+ \frac{n \cdot n-1}{2} d^3 Pd^{n-2}Q + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} d^4 Pd^{n-3}Q$$

$$+ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} d^5 Pd^{n-4}Q + \&c.$$

$$= Pd^{n+1}Q + \frac{n}{+1} \left\{ dPd^nQ \right.$$

$$+ \frac{n \cdot n-1}{2} \left\{ d^2 Pd^{n-1}Q \right.$$

$$+ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} \left\{ d^3 Pd^{n-2}Q \right.$$

$$+ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left\{ d^4 Pd^{n-3}Q \right.$$

$$+ \&c. = P d^{n+1} Q + .n + 1. d P d^n Q + . \frac{n+1.n}{2} \times$$

$$d^2 P d^{n-1} Q + . \frac{n+1.n.n-1.}{2.3} d^3 P d^{n-2} Q$$

$$+ . \frac{n+1.n.n-1.n-2.}{2.3.4} d^4 P d^{n-3} Q$$

$$+ . \frac{n+1.n.n-1.n-2.n-3.}{2.3.4.5} d^5 P d^{n-4} Q$$

+ &c. Quae fane quantitas praebet etiam, ut

liquet, fluxiones reliquas $(n-1):$ ^{efimam}, $(n-2):$ ^{efimam},

$(n-3):$ ^{efimam}, &c. ipsius $(P d Q + Q d P)$. Per se-

riem omnino similem inveniuntur fluxiones quantitatis $F d G + G d F$, ex quibus A coalescit. Jam vero ad

Maxima, ac Minima functionis $\frac{PQ}{FG}$ determinanda, va-

lores $\tau \tilde{x}$ ex aequatione $FG (P d Q + Q d P) - PQ \times (F d G + G d F) = 0$ erutos subrogare oportebit loco ipsius x in formula A , ponendo successive pro n numeros 1, 2, 3, 4, 5, &c., donec prodeat A non jam nihilo aequalis (quod perraro accidet), sed affirmativa, vel negativa. Si itaque A tunc incipiat non evanescere, cum pro n ponitur numerus par; valor $\tau \tilde{x}$

in functione $\frac{PQ}{FG}$ substitutus nullum praebet Maximum Minimumve: Si A incipiat non evanescere quando n capitur impar, radix x Maximum dat, Minimumve, primum prodeunte A negativo, alterum existente A affirmativo; omnino ut supra num. 34.

PROBLEMA III.

37. Maximos, Minimosque functionis $\frac{PQRT \dots}{FGHL \dots}$ valores invenire.

SOLUTIO.

Est $\frac{dX}{dx} = [FGHL \dots (PQR \dots dT + PQT \dots \times dR + PRT \dots dQ + QRT \dots dP) - PQRT \dots \times (FGH \dots dL + FGL \dots dH + FHL \dots dG + GHL \dots dF)]: F^2 G^2 H^2 L^2 \dots = 0$ (15.), seu solus numerator $= 0$.

Hujus numeratoris, quem dico N , radices loco 18] x substitutae in functione $\frac{PQRT \dots}{FGHL \dots}$ eam reddunt Maxi-

nam Minimumve, Maximam quidem, si per eandem substitutionem oriatur dN negativus; Minimam, si affirmativus; neutram, si dN fiat nullus subsistente ta-

men ddN . Evanefcente autem & ddN , regulae ante allatae semper est inhaerendum &c. *Q.E.I.*

S C H O L I O N.

38. Evidens est, fluxionem $(n+1)$: ^{efimam} $\tau\tilde{x}$

$\frac{PQRT\dots}{FGHL\dots}$, posito quod fluxiones ipsius praecedentes

evanescant, fieri $= \frac{dN^n}{F^2 G^2 H^2 L^2 \dots}$. Facile porro est

per num. 24. seriem determinare aequalem ipsi dN^n ; ita ut ad Maxima, ac Minima propositae functionis internoscenda substituendi sint in formula dN^n (denominatore $F^2 G^2 H^2 L^2 \dots$ semper affirmativo prorsus neglecto) valores $\tau\tilde{x} \propto$ ex aequatione $dX = 0$ elicitu ponendo successive numeros 1, 2, 3, 4, 5, &c. in locum ipsius n quoadusque oriatur valor $\tau\tilde{x} dN^n$ affirmativus, vel negativus. Si enim valor dN^n affirmativus aut negativus evadat quando n accipitur par, inita substitutio nullum propositae Functionis Maximum Minimumve indicabit; si id contingat quando n sumitur impar, habebit data Functio Maximum aliquod, aut Minimum, primum in eventu valoris dN^n negativi, secundum in hypothesi valoris ejusdem affirmativi.

PROBLEMA IV.

39. Functionis $X = \frac{P^p}{F^f}$ Maxima, ac Minima invenire.

S O L U T I O.

$$\text{Fit de more } dX = 0 = \frac{pFfP^{p-1}dP - fP^pF^{f-1}dF}{F^2f}$$

$$= \frac{P^{p-1}(pFdP - fPdF)}{F^{f+1}}; \text{ unde infertur } pFdP - fPdF$$

$= 0$; hujusque aequationis radices, seu valores x

in data functione $\frac{P^p}{F^f}$ pro x substituti functionem ipsam

Maximam, vel Minimam, vel neutram efficient, pro-
uti fluxionis secundae ddX valor ex eadem substitu-
tione ortus negativus erit, vel positivus, vel (perma-
nente fluxione tertia) nullus. Fluxio autem isthaec se-
cunda (supposita evanescencia fluxionis primae) inve-

$$\text{nitur} = \frac{P^{p-1}(pFddP + (p-f)dPdF - fPddF)}{F^{f+1}}.$$

Ergo &c. Q. E. I.

SCHOLIUM I.

40. Facile captu est, fluxionem $(n+1)$: ^{estimam} fun-
 ctionis $\frac{p^p}{Ff}$, hoc est n : ^{estimam} formulae

$$\frac{p^{p+1}(pFdP - fPdF)}{Ff^{+1}}, \text{ posito quod fluxiones reli-}$$

quae antecedentes nihilo aequentur, fore

$$\frac{p^{p+1}(pd^n FdP - fd^n PdF)}{Ff^{+1}} = (34.) \frac{p^{p+1}}{Ff^{+1}} \times$$

$$\left[pFd^{n+1}P + \frac{np}{-f} \right] dFd^n P$$

$$+ \frac{\frac{n \cdot np - p}{2}}{-nf} \left\} d^2 Fd^{n+1} P$$

$$+ \frac{\frac{n \cdot n - 1 \cdot np - 2p}{2 \cdot 3}}{\frac{n \cdot nf - f}{2}} \left\} d^3 Fd^{n+2} P$$

$$+ \frac{\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot np - 3p}{2 \cdot 3 \cdot 4}}{\frac{n \cdot n - 1 \cdot nf - 2f}{2 \cdot 3}} \left\} d^4 Fd^{n+3} P$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{n.n - 1.n - 2.n - 3.np - 4p.}{2.3.4.5} \\ & - \frac{n.n - 1.n - 2.nf - 3f.}{2.3.4} \end{aligned} \right\} d^5 F d^{n-4} P + \&c....]$$

$$= \frac{P^{p+1}}{F^{f+1}} [p F d^{n+1} P + .np - f. d F d^n P$$

$$+ \frac{n.np - p - 2f.}{2} d^2 F d^{n-1} P + \frac{n.n - 1.np - 2p - 3f.}{2.3} d^3 F d^{n-2} P$$

$$+ \frac{n.n - 1.n - 2.np - 3p - 4f.}{2.3.4} d^4 F d^{n-3} P$$

$$+ \frac{n.n - 1.n - 2.n - 3.np - 4p - 5f.}{2.3.4.5} d^5 F d^{n-4} P + \&c....]$$

$$= \frac{P^{p+1}}{F^{f+1}} \cdot M, \text{ nuncupato } M \text{ factore altero. Hinc ita-}$$

que, ut Maxima a Minimis internoscantur, substituen-

di erunt valores τ_8^x in formula $\frac{P^{p+1}}{F^{f+1}} \cdot M$ ponendo sin-

gulis vicibus pro n numeros 1, 2, 3, 4, 5, &c. usque dum ipsius formulae valor incipiat non evanescere; quod quidem si accidat ubi pro n sumitur numerus par, indicium est, nullum ex dati valoris x substi-

tutione oriri in proposita functione $\frac{P^p}{F^f}$ Maximum, Mi-

nimumve; si contra id contingat ubi n sumitur impar, habebit praedicta functio Maximum aliquod, Minimum-

ve, Maximum prodeunte $\frac{p^{p+1}}{Ff+1}$. M negativo, Minimum eo prodeunte affirmativo.

S C H O L I O N II.

41. Ex aequatione $\frac{p^{p+1} (p F d P - f P d F)}{Ff+1} = 0$

colligere licet $P = 0$, cujus proinde radices, seu va-

lores $\tau \tilde{s} x$ in functione $\frac{p^p}{Ff}$ subrogati Maxima, & Mini-

ma (si quae fuerint) suppeditabunt. Ad haec autem distinguenda, operae pretium est animadvertere, fluxio-

nes omnes ipsius $\frac{p^p}{Ff}$, quae fluxionem $p:$ ^{esimam} antece-

dunt, in hypothesi $P = 0$ fieri nihilo aequales, fluxionemque $p:$ ^{esimam} superstitem esse

$$= \frac{p \cdot p - 1 \cdot p - 2 \cdot p - 3 \cdot p - 4 \cdot p - 5 \dots 1 dP^p}{Ff};$$

quae sane, si p fuerit numerus impar, nullum propositae functionis indicabit Maximum Minimumve; si p fuerit par, Maximum arguet, aut Minimum pro valore negativo, aut affirmativo fluxionis ejusdem; Minimumque

semper designabitur, si uterque p , & f par fuerit, ob valorem fluxionis tunc necessario affirmativum.

PROBLEMA V.

42. Functionis $\frac{p^p q^q}{f^f g^g}$ valores Maximos Minimosque determinare.

SOLUTION

$$\text{Ex aequatione } dX = \frac{p^{p-1} q^{q-1} (pFGQdP + qFGPdQ - fPQGdF - gPQFdG)}{f^{f+1} g^{g+1}}$$

$= 0$ educantur valores τ & x ; iique in functione $\frac{p^p q^q}{f^f g^g}$ loco ipsius x substituti Maximam illam efficient, si fluxio secunda $d^2 \frac{p^p q^q}{f^f g^g}$ ex eadem substitutione deprehendatur negativa; Minimam, si fluxio isthaec oriatur affirmativa; neutram, si fluxio nulle scat, subsistente fluxione tertia; &c. ut supra. Q. E. I.

SCHOLIUM I.

43. Fluxio $(n+1)$:^{esima} functionis $\frac{p^p q^q}{f^f g^g}$, seu fluxio n :^{esima} formulae

$$\frac{P^{p+1} Q^{q+1} (pFGQdP + qFGPdQ - fPQGdF - gPQFdG)}{F^{f+1} G^{g+1}}$$

$$= \frac{P^{p+1} Q^{q+1} [QG(pFdP - fPdF) + PF(qGdQ - gQdG)]}{F^{f+1} G^{g+1}},$$

posito quod fluxiones omnes antecedentes evanescant,

$$\begin{aligned} \text{invenitur} &= \frac{P^{p+1} Q^{q+1}}{F^{f+1} G^{g+1}} [QG d^n (pFdP - fPdF) \\ &+ nd. QG d^{n-1} (pFdP - fPdF) + \frac{n \cdot n - 1 \cdot}{2} \times \\ &d^2 QG d^{n-2} (pFdP - fPdF) + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot}{2 \cdot 3} \times \\ &d^3 QG d^{n-3} (pFdP - fPdF) + \&c.... + PF \times \\ &d^n (qGdQ - gQdG) + nd. PF d^{n-1} (qGdQ - gQdG) \\ &+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot}{2} d^2 PF d^{n-2} (qGdQ - gQdG) \\ &+ \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot}{2 \cdot 3} d^3 PF d^{n-3} (qGdQ - gQdG) \\ &+ \&c....] = \frac{P^{p+1} Q^{q+1}}{F^{f+1} G^{g+1}} \cdot S, \text{ denominato } S \text{ fa-} \end{aligned}$$

ctorum altero. Per series autem num. 24., & 40. inveniuntur fluxiones, quae in factore S continentur.

Ponendo igitur successive in S loco ipsius n numeros

$1, 2, 3, 4, 5, \&c.$ quoadusque formula $\frac{P^{p+1} Q^{q+1}}{Ff^{+1} Gg^{+1}} \cdot S$

affirmativa fiat, vel negativa, seu donec incipiat

non evanescere, licebit, ut ante, Maxima a Minimis internoscere. Si enim praedictae formulae non evanescenti, & affirmativae respondeat numerus n impar,

proposita functio $\frac{P^p Q^q}{Ff Gg}$ Minimum habebit; Maximum,

si n imparem formula sequatur negativa; neutrum, si formula oriatur non evanescens quando n par accipitur. Evidens autem est, positis p, q, f, g , imparibus,

criterium hujusmodi ex S tantummodo peti posse, ob valorem tunc affirmativum factoris alterius.

SCHOLIUM II.

44. Aequatio

$$\frac{P^{p+1} Q^{q+1} (pFGQdP + qFGPdQ - fPQGdF - gPQFdG)}{Ff^{+1} Gg^{+1}}$$

$= 0$ suppeditat tum $P = 0$, tum $Q = 0$. Sumpto

autem $P = 0$, fluxio p : ^{esima} functionis $\frac{P^p Q^q}{Ff Gg}$ (ob

fluxiones omnes praecedentes in hac hypothefi evidenter nihilo aequales) inito calculo invenitur $= \frac{Q^q}{Ff G^g} \times$
 $(p \cdot p - 1 \cdot p - 2 \cdot p - 3 \cdot p - 4 \cdot p - 5 \dots 1 d P^p)$.
 Igitur per superius demonstrata, radix aequationis $P = 0$
 in functione $\frac{P^p Q^q}{Ff G}$ substituta Maximum, vel Minimum valorem eidem impertiet quotiescumque p fuerit par, Maximum videlicet, si fluxio illa p^{esima} ex praedictae radice substitutione valorem nanciscatur negativum; Minimum, si fluxio ipsa valorem acquirat affirmativum: at nec Maximum, nec Minimum valorem impertiet quoties p fuerit numerus impar. Haud secus, accepto $Q = 0$, deducitur fluxio q^{esima} functionis propositae, nimirum fluxio post praecedentes omnes evanescentes prima superstes $= \frac{P^p}{Ff G^g} (q \cdot q - 1 \cdot q - 2 \cdot q - 3 \cdot q - 4 \cdot q - 5 \dots 1 d Q^q)$. Itaque functio $\frac{P^p Q^q}{Ff G^g}$ Maxima evadet, aut Minima ex substitutione radice aequationis $Q = 0$ in locum $\tau^{\text{us}} x$, siquidem q fuerit numerus par, Maxima scilicet ubi fluxionis illius q^{esima} valor ex eadem substitutione prodeat negati-

vus; Minima, ubi oriatur affirmativus: neutra vero quotiescumque impar fuerit exponens q . Ergo in universum, radices aequationum $P = 0$, $Q = 0$ Maxima, aut Minima suppeditabunt, si p , q , pares fuerint; neutrum, si impares; positisque paribus non modo p , q , sed etiam f , g , Minima tantum invenientur, ob valorem nempe fluxionum p : ^{esima}, q : ^{esima} tunc necessario affirmativum.

PROBLEMA VI.

45. Functionis $X = \frac{P^p Q^q R^r T^t \dots}{F^f G^g H^h L^l \dots}$ Maxima, ac Minima determinare.

SOLUTIO.

Ex aequatione $dX = [F^f G^g H^h L^l \dots (t P^p Q^q \times R^r T^{t-1} \dots dT + r P^p Q^q T^t R^{r-1} \dots dR + q P^p R^r T^t Q^{q-1} \dots dQ + p Q^q R^r T^t P^{p-1} \dots dP) - P^p \times Q^q R^r T^t \dots (l F^f G^g H^h L^{l-1} \dots dL + h F^f G^g \times L^l H^{h-1} \dots dH + g F^f H^h L^l G^{g-1} \dots dG + f G^g \times H^h L^l F^{f-1} \dots dF)] : F^{2f} G^{2g} H^{2h} L^{2l} \dots = P^{p-1} \times Q^{q-1} R^{r-1} T^{t-1} \dots [PQRFGH \dots (t L dT - l T dL)$

$+ PQTFGL\dots(rHdR - hRdH) + PRTFHL\dots\times$
 $(qGdQ - gQdG) + QRTGHL\dots(pFdP - fPdF)]:$
 $Ff^{+1} Gg^{+1} Hh^{+1} Ll^{+1} \dots = 0$ eliciantur valores $r^{\sim}$
 x ; iique in functione X substituti valorem ipsius Ma-
 ximum, Minimum, vel neutrum exhibebunt prouti se-
 cundae fluxionis ddX valor ex eadem substitutione
 proveniens negativus fuerit, affirmativus, vel perma-
 nente fluxione tertia nullus. Si & tertia evanuerit, per-
 gendum ad quartam, &c. ut supra. *Q. E. I.*

S C H O L I O N I.

46. Attendenti perspectum est, fluxionem

$(n+1):$ ^{esimam} functionis X , seu $n:$ ^{esimam} ipsius
 dX (supposita fluxionum antecedentium evanescencia)
 fore $\frac{PP^{+1} Qq^{+1} Rr^{+1} Tt^{+1} \dots}{Ff^{+1} Gg^{+1} Hh^{+1} Ll^{+1} \dots} [PQRFGH\dots\times$
 $d^n (tLdT - lTdL) + n d. PQRFGH\dots d^{n-1} (tLdT$
 $- lTdL) + \frac{n \cdot n - 1}{2} d^2. PQRFGH\dots d^{n-2} (tLdT$
 $- lTdL) + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} d^3 PQRFGH\dots \times$

$$\begin{aligned}
& d^{n+3} (tLdT - lTdL) + \&c. \dots + PQTFGL \dots \times \\
& d^n (rHdR - hRdH) + n d. PQTFGL \dots d^{n+1} (rHdR \\
& - hRdH) + \frac{n \cdot n - 1}{2} d^2 PQTFGL \dots d^{n+2} (rHdR \\
& - hRdH) + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} d^3 PQRFGH \dots \times \\
& d^{n+3} (rHdR - hRdH) + \&c. \dots + PRTFHL \dots \times \\
& d^n (qGdQ - gQdG) + n d. PRTFHL \dots d^{n+1} (qGdQ \\
& - gQdG) + \frac{n \cdot n - 1}{2} d^2 PRTFHL \dots d^{n+2} (qGdQ \\
& - gQdG) + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} d^3 PRTFHL \dots \times \\
& d^{n+3} (qGdQ - gQdG) + \&c. \dots + QRTGHL \dots \times \\
& d^n (pFdP - fPdF) + n d. QRTGHL \dots d^{n+1} (pFdP \\
& - fPdF) + \frac{n \cdot n - 1}{2} d^2 QRTGHL \dots d^{n+2} (pFdP \\
& - fPdF) + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} d^3 QRTGHL \dots \times
\end{aligned}$$

$d^{n+3} (pFdP - fPdF) + \&c. \dots]$. In hac formula, cu-
jus termini fluxionarii per num. 24., & 48. inveniun-

tur, facta substitutione valoris x , positisque successive numeris 1, 2, 3, 4, 5, &c. pro n , vel ea incipit non evanescere quando n accipitur par, vel cum n sumitur impar. In primo eventu functio X ex substitutione dati valoris x nullum acquirit valorem Maximum, Minimumve; in altero eventu functio ipsa Minima evadit, si formula fuerit affirmativa; & functio oritur Maxima, si formula prodeat negativa. Si exponentes $p, q, r, t, \dots, f, g, h, l, \dots$ impares supponantur, tunc

quidem ob valorem factoris $\frac{P^{p-1} Q^{q-1} R^{r-1} T^{t-1} \dots}{F^{f+1} G^{g+1} H^{h+1} L^{l+1} \dots}$

affirmativum, ex altero formulae factore iudicium petere sufficiet.

SCHOLIUM II.

47. Ex aequatione $dX = 0$ palam est obtineri

$$1.^{\circ} P = 0;$$

$$2.^{\circ} Q = 0;$$

$$3.^{\circ} R = 0;$$

$$4.^{\circ} T = 0.$$

Jam vero assumpto $P = 0$, fluxio p:^{esima} functionis propo-

sitae invenitur $\frac{Q^q R^r T^t \dots}{F^f G^g H^h L^l \dots} (p \cdot p - 1 \cdot p - 2 \cdot x$

$p - 3 \cdot p - 4 \cdot p - 5 \dots 1 d P^p$); reliquae omnes antecedentes evanescunt. Pariter accepto $Q = 0$, fluxio

q :^{esima} ipsius X non evanescens praebet $\frac{P^p R^r T^t \dots}{F^f G^g H^h L^l \dots} \times$

$(q \cdot q - 1 \cdot q - 2 \cdot q - 3 \cdot q - 4 \cdot q - 5 \dots 1 d Q^q)$.

Rursus posito $R = 0$, fluxio ipsius X r :^{esima}, quae (reliquis evanescentibus) incipit non evanescere, oritur

$\frac{P Q^q T^t \dots}{F^f G^g H^h L^l \dots} (r \cdot r - 1 \cdot r - 2 \cdot r - 3 \cdot r - 4 \cdot r - 5 \dots 1 d R^r)$.

Denique facto $T = 0$ fluxio t :^{esima} ipsius X invenitur

$= \frac{P^p Q^q R^r \dots}{F^f G^g H^h L^l \dots} (t \cdot t - 1 \cdot t - 2 \cdot t - 3 \cdot t - 4 \cdot t - 5 \dots 1 d T^t)$.

Ex his porro manifestum est, radices aequationum $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, $T = 0$ in functione X substitutas Maxima, aut Minima suppeditare, quotiescumque exponentes p, q, r, t numeros pares exhibuerint, & Maxima quidem, si fluxionum praedictarum valores per eandem substitutionem negativi prodierint; Minima, si affirmativi; ubi autem exponentes ipsi impares fuerint, nec Maxima, nec Minima ex radicum illarum substitutione obtineri; denique

Minimum aliquod semper oriri, ubi exponentes omnes
 $p, q, r, t, \dots, f, g, h, l, \dots$ pares extiterint, ob valo-
 rem nimirum fluxionum $p: \overset{\text{esima}}{\text{esima}}$, $q: \overset{\text{esima}}{\text{esima}}$, &c. tunc
 necessario affirmativum.



DISQUISITIO XIII.

DE ÆQUATIONIBUS INDEFINITIS,
DEQUE METHODO INDETERMI-
NATARUM.

1. **I**N æquationum indefinitarum indole ac natura expendenda, earumque radicibus indagandis peculiaria quandoque se offerunt artificia, quae Geometrae regulis generalibus ad id præstandum idoneis destituto mirifice opitulantur, eumque præter spem ad propositam sibi metam perducunt.

2. Inquirebam nuper in indolem indefinitæ æquationis terminorum numero utcumque magno conflatae
(A) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n = 0$.
Quum autem notas omnes regulas frustra tentassem, succurrit tandem mihi, æquationem ipsam converti posse in hanc simplicissimam $x^{n+1} - 1 = 0$. Nam æquationis (A) termini sunt continue proportionales, ut patet, eorumque summa ex Progressionum Doctrina obtinetur si ex facto termini postremi x^n in secundum x aufertur termini primi 1 quadratum, & residuum dividitur per primi & secundi termini differentiam;

ex quo oritur $1 + x + x^2 + x^3 \dots + x^n =$
 $\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = 0$; ac proinde (B) $x^{n+1} - 1 = 0$.

3. Id ipsum nanciscor alia via: divido scilicet terminos omnes aequationis (A) per x^n , habeoque

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \dots + \frac{1}{x^n} = 0. \text{ Modo ani-}$$

madverto formulam $\frac{1}{x-1}$ esse $= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \dots$

$$+ \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n(x-1)} = \frac{1}{x^n(x-1)} + (A) - 1.$$

Quum autem sit (A) $= 0$; oritur $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^n(x-1)}$

$- 1$, ac denique (B) $x^{n+1} - 1 = 0$, uti prius.

4. Considero aequationes duas

$$(A) \quad 1 + x + x^2 + x^3 \dots + x^n = 0$$

$$(B) \quad x^{n+1} - 1 = 0,$$

quarum haec deducta est ab illa, & quae iccirco praeter radicem unicam $x=1$, alias radices omnes communes habet cum aequatione (A). Notum porro est, in hypothesis n imparis, five $n+1$ paris radicem alteram aequationis (B) esse -1 : proindeque in hac

$$x = \cos. \frac{n-1}{n+1} \pi + \sqrt{\left(\cos^2. \frac{n-1}{n+1} \pi - 1 \right)}$$

$$x = \cos. \frac{n-1}{n+1} \pi - \sqrt{\left(\cos^2. \frac{n-1}{n+1} \pi - 1 \right)};$$

supposito autem n pari, radices omnes imaginariae sunt, videlicet sequentes

$$x = \cos. \frac{2}{n+1} \pi + \sqrt{\left(\cos^2. \frac{2}{n+1} \pi - 1 \right)}$$

$$x = \cos. \frac{2}{n+1} \pi - \sqrt{\left(\cos^2. \frac{2}{n+1} \pi - 1 \right)}$$

$$x = \cos. \frac{4}{n+1} \pi + \sqrt{\left(\cos^2. \frac{4}{n+1} \pi - 1 \right)}$$

$$x = \cos. \frac{4}{n+1} \pi - \sqrt{\left(\cos^2. \frac{4}{n+1} \pi - 1 \right)}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x = \cos. \frac{n}{n+1} \pi + \sqrt{\left(\cos^2. \frac{n}{n+1} \pi - 1 \right)}$$

$$x = \cos. \frac{n}{n+1} \pi - \sqrt{\left(\cos^2. \frac{n}{n+1} \pi - 1 \right)}$$

6 Pari ratiocinandi modo demonstrari brevissime

potest Theorema, quod in Algebrae Elementis (a) ostendit EULERUS methodo a Dan. BERNOULLIO proposita in Actis veteribus Petropolitanae Academiae tom. III., nimirum aequationis infinitae (C)

$$x^{\infty} - x^{\infty+1} - x^{\infty+2} - \dots - x^2 - x - 1 = 0$$

radicem unam realem esse numerum binarium. Nam ex Progressionum doctrina summa terminorum omnium hujus aequationis praeter primum est

$\frac{1-x^{\infty}}{x-1}$; propterea aequatio (C) degenerat in

$x^{\infty} + \frac{1-x^{\infty}}{x-1} = 0$, seu, in $x^{\infty+1} - 2x^{\infty} + 1 = 0$, seu (facta divisione per x^{∞}) in

$x - 2 + \frac{1}{x} = 0$, cui postremae aequationi evidenter satisfacit positio $x = 2$. Idem ostendi potest divisa aequatione (C) per x^{∞} , ex quo producit

$$1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \dots - \frac{1}{x^{\infty}} = 0 :$$

constat autem ex Theoria Progressionum, assumpto

(a) Vid. Leonhard EULER *Vollständige Anleitung zur Algebra*. Zweyt. Theil, Erst. Abschn. Cap. 16. §. 239. Vid. etiam versionem gallicam Jo. BERNOULLII tom. 1. §. 800.

$x = 2$ terminos post primum omnes $-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$
 $-\frac{1}{x^3} \dots - \frac{1}{x^\infty}$ evadere $= -1$, & confe-

quenter aequationi fieri satis.

7. Perpendo nunc aequationem (D) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 \dots + (n+1)x^n = 0$, videoque oriri ipsam ex divisione unitatis per binomium quadratum $(1-x)^2$, ita ut sit $\frac{1}{(1-x)^2}$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \dots + (n+1)x^n + \frac{ax^{n+1} + bx^{n+2}}{(1-x)^2}, \text{ ubi } a, b \text{ per coefficientes Binomii}$$

determinantur. Fit itaque

$$(E) \quad bx^{n+2} + ax^{n+1} - 1 = 0. \text{ Quare aequationis}$$

(D) resolutio pendet a resolutione aequationis trinomialae (E).

8. Contemplor rursus aequationem aliam

$$(F) \quad 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 \dots + \frac{(n+1)(n+2)x^n}{2} = 0, \text{ hancque produci de-}$$

prehendo per divisionem unitatis factam a binomio

cubico $(1-x)^3$. Inde vero sequens nanciscor resultat

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 \dots$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)x^n}{2}$$

$$+ \frac{ax^{n+1} + bx^{n+2} + cx^{n+3}}{(1-x)^3}; \text{ ex quo aequatio-}$$

nem consequor quadrimomiam (G) $cx^{n+3} + bx^{n+2} + ax^{n+1} - 1 = 0$. Quapropter aequationis indefinitae (F) resolutio ad resolutionem aequationis tantum quadrimomiae (G) revocatur.

9. Sit iterum indefinita aequatio

$$(H) \quad 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + 56x^5 \dots$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)x^n}{2 \cdot 3} = 0. \text{ Oritur}$$

haec ex divisione unitatis per binomium biquadraticum $(1-x)^4$. Divisione autem perfecta invenitur

$$\frac{1}{(1-x)^4} = (H) + \frac{ax^{n+1} + bx^{n+2} + cx^{n+3} + dx^{n+4}}{(1-x)^4};$$

& quum sit ex hypothesi $(H) = 0$; fit ideo

$$(I) \quad dx^{n+4} + cx^{n+3} + bx^{n+2} + ax^{n+1} - 1 = 0.$$

Quamobrem indefinita aequatio (H) in alteram dumtaxat quinquinomiam (I) promptissime contrahitur.

10. Sit demum generalius aequatio indefinita

$$\begin{aligned} (K) \quad & 1 + nx + \frac{n(n+1)x^2}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)x^3}{2 \cdot 3} \\ & + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \\ & + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \dots (n+m-1)x^m}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots n}. \end{aligned}$$

Animadverto aequationem hanc resultare ex divisione unitatis per binomium $1 - x$ ad potentiam n evectum. Divisione autem actu suscepta consequimur

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^n} &= (K) \\ &+ \frac{ax^{m+1} + bx^{m+2} + cx^{m+3} + dx^{m+4} + \dots + ex^{m+n}}{(1-x)^n}; \end{aligned}$$

& quoniam est ex hypothesi $(K) = 0$, prodibit demum $(L) \quad ex^{m+n} \dots + dx^{m+4} + cx^{m+3} + bx^{m+2} + ax^{m+1} - 1 = 0$. Propterea indefinita aequatio (K) convertibilis semper est in aliam (L) terminorum numero $n+1$ dumtaxat constantem.

11. Haud absimili methodo summam n ter-

minorum seriei $\frac{1}{x} + \frac{2^m}{x^2} + \frac{3^m}{x^3} + \frac{4^m}{x^4} + \&c.$,

designante m numerum quemlibet affirmativum integrum, habebimus in potestate. Sit enim $1.^o\ m = 0$, ita ut

series fiat $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \&c.$ Assumo indeterminatam magnitudinem y , & constituo aequalitatem

$$\frac{y}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \&c. \text{ in } \textit{infin.}$$

Tum duco primi æquationis membri denominatorem $x-1$

in membrum alterum $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \&c. \text{ in } \textit{infin.}$, &

productum nanciscor $= 1$. Igitur $y = 1$. Igitur $\frac{1}{x-1}$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \&c. \text{ in } \textit{infin.}$$

Quaerebatur autem summa tantum n terminorum: proinde oportebit ab

$\frac{1}{x-1}$ subtrahere summam terminorum omnium ter-

minum n :^{mum} consequentium. Jamvero termini isti

n :^{mum} consequentes sunt $\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+2}} + \frac{1}{x^{n+3}} \&c.$

in infin., five $\frac{1}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \&c. \text{ in } \textit{infin.} \right)$,

hoc est ex dictis $\frac{1}{x^n} \times \frac{1}{x-1}$. Consequenter summa

$$\text{quaesita prodibit} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^n} \times \frac{1}{x-1}.$$

12. Sit 2.^o $m=1$, & series $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4}$

&c. *in infin.* Pono $\frac{y}{(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4}$

+ &c. *in infin.* Duco $(x-1)^2$ in seriem propositam, invenioque productum $= x$. Hinc colligo $y = x$, &

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4} \&c. \text{ in } \textit{infin.} \text{ Sunt}$$

autem seriei termini post n : $\frac{n+1}{x^{n+1}} + \frac{n+2}{x^{n+2}} + \frac{n+3}{x^{n+3}}$

+ $\frac{n+4}{x^{n+4}}$ &c. *in infin.* Horum iccirco summa subtra-

henda erit ab $\frac{x}{(x-1)^2}$. Dividuntur vero isti in

series duas

$$I. \frac{n}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \&c. \text{ in } \text{infin.} \right) = \frac{n}{x^n} \times \frac{1}{x-1} (\S. 11.)$$

$$II. \frac{1}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \&c. \text{ in } \text{infin.} \right) = \frac{1}{x^n} \times \frac{x}{(x-1)^2}$$

Igitur summa quaesita

$$= \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} \times \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{n}{x^n} \times \frac{1}{x-1}$$

$$13. \text{ Sit } 3^o m = 2, \text{ adeoque series } \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{16}{x^4} + \&c. \text{ in } \text{infin.} \text{ Capiò } \frac{y}{(x-1)^3} = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}$$

$$+ \frac{9}{x^3} + \frac{16}{x^4} \&c. \text{ in } \text{infin.}, \& \text{ serie ducta in } (x-1)^3$$

$$\text{invenio productum} = x^2 + x. \text{ Igitur } y = x^2 + x.$$

$$\text{Quare } \frac{x(x+1)}{(x-1)^3} = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{16}{x^4} \&c. \text{ in}$$

$$\text{infin. Jam termini seriei post } n: \text{ sum sunt } \frac{(n+1)^2}{x^{n+1}}$$

$$+ \frac{(n+2)^2}{x^{n+2}} + \frac{(n+3)^2}{x^{n+3}} + \frac{(n+4)^2}{x^{n+4}} \&c. \text{ in in-}$$

$$\text{fin.}, \text{ vel etiam } \frac{n^2 + 2n + 1}{x^{n+1}} + \frac{n^2 + 4n + 4}{x^{n+2}}$$

$$+ \frac{n^2 + 6n + 9}{x^{n+3}} + \frac{n^2 + 8n + 16}{x^{n+4}} + \&c. \text{ in in-}$$

fin. Hosce porro terminos dispescere licet in tres series sequentes:

$$\text{I. } \frac{n^2}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \&c. \text{ in } \textit{infin.} \right) = \frac{n^2}{x^n} \times \frac{1}{x-1}$$

$$\text{II. } \frac{2n}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4} \&c. \text{ in } \textit{infin.} \right) = \frac{2n}{x^n} \times \frac{x}{(x-1)^2}$$

$$\text{III. } \frac{1}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^3} + \frac{16}{x^4} \&c. \text{ in } \textit{infin.} \right) = \frac{1}{x^n} \times \frac{x(x+1)}{(x-1)^3}$$

Ergo summa quaesita

$$= \frac{x(x+1)}{(x-1)^3} - \frac{1}{x^n} \times \frac{x(x+1)}{(x-1)^3} - \frac{2n}{x^n} \times \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{n^2}{x^n} \times \frac{1}{x-1}$$

14. Esto 4.^o $m = 3$, sitque proinde series

$$\frac{1}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{27}{x^3} + \frac{64}{x^4} + \frac{125}{x^5} + \&c. \text{ in } \textit{infin.} \text{ Consti-}$$

$$\text{tuta de more aequalitate } \frac{y}{(x-1)^4} = \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{27}{x^3}$$

$\&c. \text{ in } \textit{infin.}$, & multiplicata per $(x-1)^4$ assequimur

$$y = (x-1)^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{27}{x^3} + \&c. \text{ in } \textit{infin.} \right)$$

$$= x^3 + 4x^2 + x = x(x+2)^2 - 3x. \text{ Igitur}$$

$$\frac{x(x+2)^2 - 3x}{(x-1)^4} = \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{27}{x^3} \&c. \text{ in } \textit{infin.}$$

Jamvero seriei termini, qui n.^{um} consequuntur, sunt

$$\frac{(n+1)^3}{x^{n+1}} + \frac{(n+2)^3}{x^{n+2}} + \frac{(n+3)^3}{x^{n+3}} + \frac{(n+4)^3}{x^{n+4}} \&c. \text{ in}$$

infin., hique distribuuntur in series quatuor sequentes

$$\text{I. } \frac{n^3}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \&c. \text{ in } \textit{infin.} \right) = \frac{n^3}{x^n} \times \frac{1}{x-1}$$

$$\text{II. } \frac{3n^2}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \&c. \text{ in } \textit{infin.} \right) = \frac{3n^2}{x^n} \times \frac{x}{(x-1)^2}$$

$$\text{III. } \frac{3n}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^3} \&c. \text{ in } \textit{infin.} \right) = \frac{3n}{x^n} \times \frac{x(x+1)}{(x-1)^3}$$

$$\text{IV. } \frac{1}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{27}{x^3} \&c. \text{ in } \textit{infin.} \right) = \frac{1}{x^n} \times \frac{x(x+2)^2 - 3x}{(x-1)^4}$$

Itaque demptis ab $\frac{x(x+2)^2 - 3x}{(x-1)^4}$ fit summa, quam

$$\text{petimus, } = \frac{x(x+2)^2 - 3x}{(x-1)^4} - \frac{1}{x^n} \times \frac{x(x+2)^2 - 3x}{(x-1)^4}$$

$$- \frac{3n}{x^n} \times \frac{x(x+1)}{(x-1)^3} - \frac{3n^2}{x^n} \times \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{n^3}{x^n} \times \frac{1}{x-1}$$

T

15. Sit $5.^o m = 4$, adeoque series $\frac{1}{x} + \frac{16}{x^2}$
 $+ \frac{81}{x^3} + \frac{256}{x^4} + \&c. \text{ in } \text{infin.} = \frac{y}{(x-1)^5}$, cujus
 aequalitatis multiplicato utroque membro per $(x-1)^5$
 invenitur $y = x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x$. Propterea
 $\frac{1}{x} + \frac{16}{x^2} + \frac{81}{x^3} \&c. \text{ in } \text{infin.} = \frac{x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x}{(x-1)^5}$.

Porro seriei termini, qui n.^{um} consequuntur, sunt

$$\frac{(n+1)^4}{x^{n+1}} + \frac{(n+2)^4}{x^{n+2}} + \frac{(n+3)^4}{x^{n+3}} + \frac{(n+4)^4}{x^{n+4}} + \&c.$$

$$\text{in } \text{infin.}, \text{ nimirum } \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{x^{n+1}}$$

$$+ \frac{n^4 + 8n^3 + 24n^2 + 32n + 16}{x^{n+2}}$$

$$+ \frac{n^4 + 12n^3 + 54n^2 + 108n + 81}{x^{n+3}}$$

$$+ \frac{n^4 + 16n^3 + 96n^2 + 256n + 256}{x^{n+4}} + \&c.$$

in *infin.*; atque isti constituunt series quinque
 sequentes:

$$\text{I. } \frac{n^4}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \&c. \text{ in } \text{infin.} \right) = \frac{n^4}{x^n} \times \frac{1}{x-1}$$

$$\text{II. } \frac{4n^3}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \&c. \text{ in } \text{infin.} \right) = \frac{4n^3}{x^n} \times \frac{x}{(x-1)^2}$$

$$\text{III. } \frac{6n^2}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^3} \&c. \text{ in } \text{infin.} \right) = \frac{6n^2}{x^n} \times \frac{x(x+1)}{(x-1)^3}$$

$$\text{IV. } \frac{4n}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{27}{x^3} \&c. \text{ in } \text{infin.} \right) = \frac{4n}{x^n} \times \frac{x(x+2)^2 - 3x}{(x-1)^4}$$

$$\text{V. } \frac{1}{x^n} \left(\frac{1}{x} + \frac{16}{x^2} + \frac{81}{x^3} \&c. \text{ in } \text{infin.} \right) = \frac{1}{x^n} \times \frac{x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x}{(x-1)^5}$$

Hiscæ vero a præcedenti summa subtractis assequimur

$$\text{summam } n \text{ terminorum} = \frac{x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x}{(x-1)^5}$$

$$- \frac{1}{x^n} \times \frac{x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x}{(x-1)^5} - \frac{4n}{x^n} \times \frac{x(x+2)^2 - 3x}{(x-1)^4}$$

$$- \frac{6n^2}{x^n} \times \frac{x(x+1)}{(x-1)^3} - \frac{4n^3}{x^n} \times \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{n^4}{x^n} \times \frac{1}{x-1}$$

$$16. \text{ Eadem analysi invenitur series } \frac{1}{x} + \frac{2^5}{x^2} + \frac{3^5}{x^3}$$

$$+ \frac{4^5}{x^4} + \frac{5^5}{x^5} \&c. \text{ in } \text{infin.} = \frac{x^5 + 26x^4 + 66x^3 + 26x^2 + x}{(x-1)^6}$$

Ex hæcenus vero dictis prout erit inferre,

1.^o Summam seriei generalis $\frac{1}{x} + \frac{2^m}{x^2} + \frac{3^m}{x^3} + \frac{4^m}{x^4}$ &c. in infin. protractae exhiberi per fractionem,

cujus denominator est binomium $x - 1$ elevatum ad potestatem $m + 1$, cujus potestatis index unitate excedit indicem potestatum numerorum 1, 2, 3, &c. in terminis seriei.

2.^o Ejus fractionis numeratorem constare terminorum numero m .

3.^o Coefficientes terminorum in ipso numeratore post terminum medium eosdem redire ac ante terminum medium, sed ordine inverso, instar unciarum Binomii.

4.^o Coefficientem termini primi in eodem numeratore esse $= 1$

5.^o Coefficientem secundi $= 2^m - \frac{m + 1}{1}$.

6.^o Coefficientem tertii $= 3^m - 2^m \cdot \frac{m + 1}{1} + \frac{(m + 1)m}{1 \cdot 2}$.

7.^o Coefficientem quarti $= 4^m - 3^m \cdot \frac{m + 1}{1}$.

$$+ 2^m \cdot m \cdot \frac{m+1}{1 \cdot 2} - \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

8º Coefficientem quinti &c.

Igitur summa seriei $\frac{1^m}{x} + \frac{2^m}{x^2} + \frac{3^m}{x^3} + \frac{4^m}{x^4}$ &c. in inf.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(x-1)^{m+1}} \left[x^m + \left(2^m - \frac{m+1}{1} \right) x^{m-1} \right. \\ &+ \left(3^m - 2^m \times \frac{m+1}{1} + m \times \frac{m+1}{1 \cdot 2} \right) x^{m-2} \\ &+ \left(4^m - 3^m \times \frac{m+1}{1} + 2^m m \times \frac{m+1}{1 \cdot 2} \right. \\ &\left. \left. - \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right) x^{m-3} + \&c. \dots + x \right]. \end{aligned}$$

Si jam ponatur

$$A = \frac{1}{x-1},$$

$$B = \frac{x}{(x-1)^2},$$

$$C = \frac{x^2+x}{(x-1)^3},$$

T 3

$$D = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(x-1)^4},$$

$$E = \frac{x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x}{(x-1)^5}$$

$$F = , \&c.,$$

summa autem seriei $\frac{1^m}{x} + \frac{2^m}{x^2} + \frac{3^m}{x^3} \&c.$

in *infin.* dicatur W , assequemur summam n tantum terminorum ipsius seriei sequenti expressione exhibitam

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{x^n}\right) W &= \frac{n^m}{x^n} A - \frac{mn^{m-1}}{x^n} B \\ &- \frac{m(m-1)n^{m-2}}{1.2x^n} C - \frac{m(m-1)(m-2)n^{m-3}}{1.2.3x^n} D \\ &- \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)n^{m-4}}{1.2.3.4x^n} E - \&c.; \end{aligned}$$

cujus sane expressionis indoles manifesta est, idque habet peculiare, ut quantitates complectatur $A, B, C, \&c.$ per x^n divisas, & singillatim multiplicatas per termi-

nos singulos binomii $n - 1$ ad potestatem m elati & explicati.

17. Omnibus Algebrae Scriptoribus familiare est, ex aequatione (P) $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \dots + rx^n = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4 \dots + r'x^n$ sequentes deducere aequalitates

$$a = a'$$

$$b = b'$$

$$c = c'$$

$$(M) \quad d = d'$$

$$e = e'$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$r = r'$$

At huiusmodi illatio doctissimorum licet hominum auctoritate suffulta fallax quandoque & captiosa est. Itaque operae praetium erit limites constituere, conditio-

nesque praescribere, in quibus regula aut recte pronunciat, aut fallit.

18. Igitur converto aequationem (P) in alteram (Q) $a - a' + (b - b')x + (c - c')x^2 + (d - d')x^3 \dots + (r - r')x^n = 0$; & dico generatim, aequalitates (M) semper locum habere si quantitas x in aequatione (P) valorem habeat diversum a radice qualibet aequationis (Q) , ita ut nulla sit istius radix, quae cum magnitudine x prioris aequationis (P) conveniat: & contra, haud recte colligi, pronuncio, aequalitates (M) , quotiescumque aequatio (Q) aliquam habuerit radicem realem cum valore x prioris aequationis convenientem. Nam quum aequatio (Q) nihil aliud sit quam aequatio ipsa (P) sub alia forma, nequit haec verificari nisi ubi verificatur & illa. Illa autem (Q) verificatur semper & solum tum accepta x pro una qualibet ex ipsius radicibus, tum assumptis coefficientibus ejus singulis nihilo aequalibus. Igitur verificatur aequatio (P) non solum quando fuerit $a - a' = 0$, $b - b' = 0$, $c - c' = 0$, &c., hoc est quando aequalitates (M) locum habent, verum etiam quoties data qualibet inter coefficientes sibi respondentes a & a' , b & b' , c & c' , d & d' , &c. inaequalitate & discrepantia fuerit x aequalis radici alicui reali aequationis (Q) . Quapropter ex aequatio-

ne (P) inferri nequeunt aequalitates (M) nisi ubi certo constiterit, valorem quantitatis x in aequatione ipsa (P) spectatum nequaquam reperiri inter radices reales aequationis (Q).

19. Hinc ignorato utcumque valore ipsius x in aequatione (P), sequens fanciri potest

C A N O N I.

Si tributis quantitati x valoribus perpetuo diversis, numeroque pluribus quam n , aequationi (P) semper satisfiat, stabunt aequalitates (M).

Nam aequatio (Q) nequit plures quam n radices habere; proindeque valor aliquis ipsius x in aequatione (P) necessario differet a radicibus aequationis (Q).

20. A fortiori statui potest

C A N O N II.

Stabunt aequalitates (M), si valor ipsius x in aequatione (P) variabilis fuerit, utcumque arcti sint variationis limites.

Etenim intra hosce limites numerus valorum ipsius x semper excedet n .

Huc spectat casus quantitatis x infinitesimae, vel infinitae; siquidem nulla est infinitesima, vel infinita

quantitas in se determinata, & quod infinitesimum, vel infinitum dicimus nihil aliud est nisi indefinitum perpetuo decrescens, aut crescens ultra datum quemlibet limitem.

21. Corruit summorum etiam Geometrarum ratio-
cinatio (b), qui in aequatione (P) assumpta $x = 0$,
inde colligunt aequalitates (M); quum tamen ex illa
assumptione una tantum deduci possit aequalitas $a = a'$,
caeterae non item. Sane utcumque inaequales sint
coefficientes b & b' , c & c' , d & d' , e & e' , &c.,
dummodo sit $a = a'$, subsistit aequatio (P), quae
evanescentibus terminis omnibus praeter primos utrius-
que membri mutatur in $a + 0 = a' + 0$, sive $a = a'$.

22. Exemplum illegitimae illationis aequalitatum
(M) ex aequatione (P) extra praescriptas conditio-
nes habetur vel in tribus tantum terminis $a + bx + cx^2 = a' + b'x + c'x^2$, ubi

$$a = 1 \quad a' = 6$$

$$b = 4 \quad b' = 8$$

$$c = 3 \quad c' = 2$$

$$x = 5$$

$$x = -1.$$

(b) Consule unum instar omnium magnum EULERUM in
Intr. ad An. Inf. tom. 1. §. 214.

Oritur enim $1 + 4x + 3x^2 = 6 + 8x + 2x^2$,
 & posito $x = 5$, fit $1 + 4 \times 5 + 3 \times 25 = 6 + 8 \times 5$
 $+ 2 \times 25 = 96$, atque iterum sumpto $x = -1$,
 invenitur $1 - 4 + 3 = 6 - 8 + 2 = 0$. Valores 5,
 & -1 quantitatis x eruti sunt ex aequatione $(c - c')x^2$
 $+ (b - b')x + a - a' = 0$, quae de more tra-

ctata dat $x = \frac{b' - b}{2c - 2c'} \pm \sqrt{\left(\frac{b' - b}{2c - 2c'}\right)^2 + \frac{a' - a}{c - c'}}$.

23. Tertius fanciri potest Canon de coefficientium
 hujusmodi aequalitate, scilicet

C A N O N III.

*Si omnes praeter unum coefficientes prioris membri aequa-
 tionis (P) aequantur coefficientibus homologis alterius mem-
 bri, etiam reliquus aequatur reliquo, quicumque sit ipsius
 x valor praeter nihilum.*

Sublatis enim hinc inde terminis omnibus inter
 se aequalibus, perseverabit aequalitas inter duos illos
 reliquos, qui iccirco divisi per potestatem, quam ibi-
 dem obtinet x , relinquent coefficientes aequales.

24. Etiam si utrumque aequationis (P) membrum
 sit nihilo aequale, non possunt tamen generaliter in-
 ferri aequalitates (M) quoties pro x accipitur radix
 aliqua membri alterutrius. Nam ex $a + bx + cx^2$

$$+ dx^3 + ex^4 \dots + rx^n = a' + b'x + c'x^2 \\ + d'x^3 + e'x^4 \dots + r'x^n = 0, \text{ protinus deducitur}$$

$$(R) x^n \dots + \frac{e}{r} x^4 + \frac{d}{r} x^3 + \frac{c}{r} x^2 + \frac{b}{r} x + \frac{a}{r} = 0,$$

$$\& (S) x^n \dots + \frac{e'}{r'} x^4 + \frac{d'}{r'} x^3 + \frac{c'}{r'} x^2 + \frac{b'}{r'} x + \frac{a'}{r'} = 0.$$

Quum autem ex Algebra notum sit, coefficientem secundi termini aequationis cujuscumque esse summam omnium radicum, coefficientem tertii summam productorum e binis, coefficientem quarti summam productorum e ternis, quinti e quaternis; &c. & coefficientem ultimi esse productum ex omnibus radicibus, aequales iccirco erunt aequationum (R) , (S) coefficientes homologii

$$\frac{a}{r} = \frac{a'}{r'}$$

$$\frac{b}{r} = \frac{b'}{r'}$$

$$\frac{c}{r} = \frac{c'}{r'}$$

$$\frac{d}{r} = \frac{d'}{r'}$$

$$\frac{e}{r} = \frac{e'}{r'}$$

atque hinc eliciuntur aequalitates

$$\frac{r}{r} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = \frac{d}{d} = \frac{e}{e} = \&c., \text{ quae}$$

tantum docent, coefficientes homologos esse in eadem semper ratione, utcumque sint inaequales.

25. Id ipsum ostenditur ducta aequatione

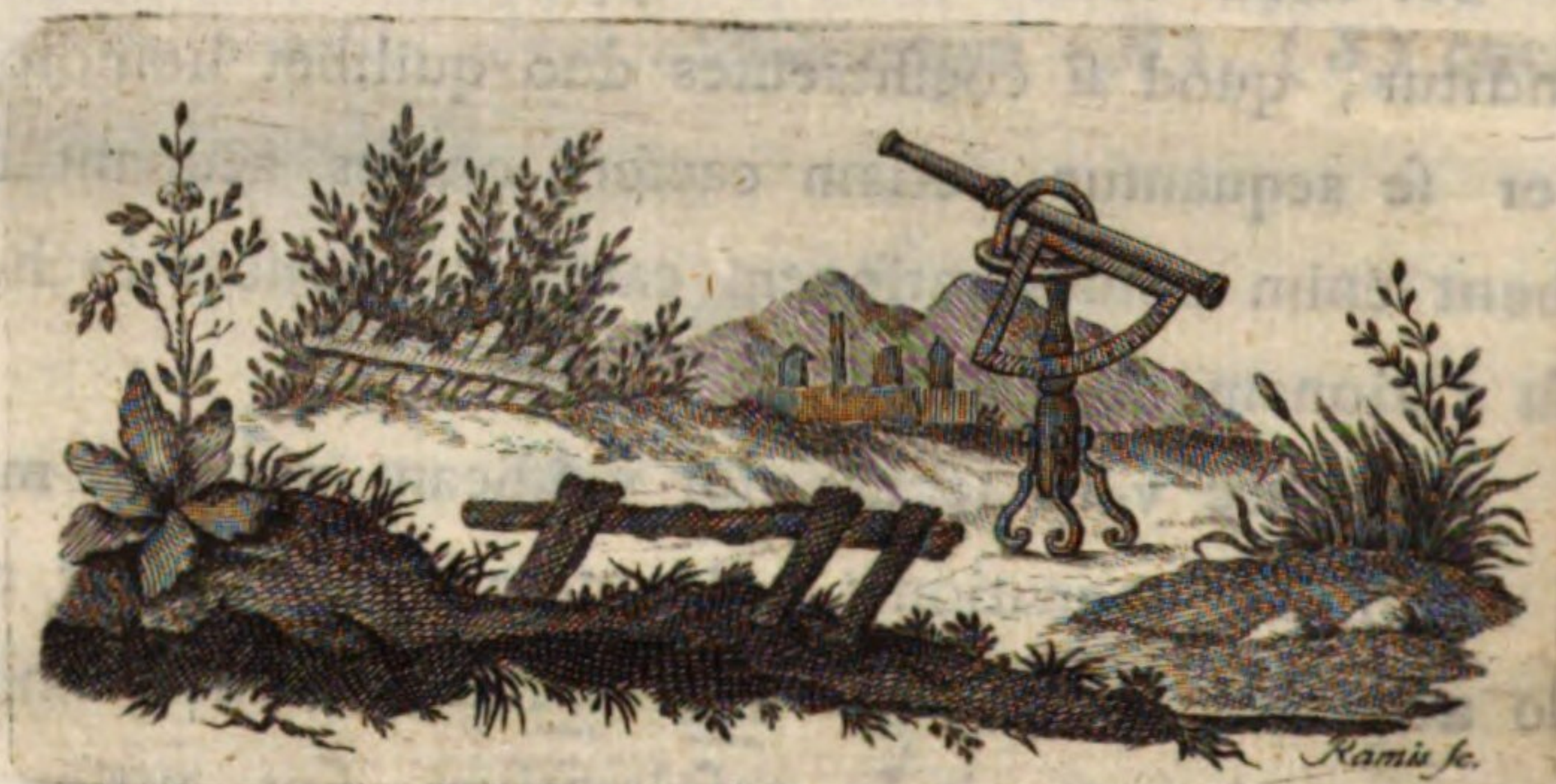
$a + bx + cx^2 \dots + rx^n = 0$ in m , ex quo oritur $ma + mbx + mcx^2 \dots + mrx^n = 0$, quin tamen sit $a = ma$, $b = mb$, &c.

26. Illud tamen in hac hypothefi verumprehenditur, quod si coefficientes duo quilibet homologici inter se aequantur, etiam caeteri omnes aequantur; habent enim omnes rationem eandem, scilicet in hoc casu rationem aequalitatis.

27. Haec vero locum sibi vindicant ubi non modo utrumque aequationis (P) membrum ponatur nihilo aequale, verum etiam ubi radices omnes amborum aequationum inde resultantium sint utrimque communes. Si enim duae aequationes ex binis illis membris nihilo aequalibus ortae unam tantum haberent radicem communem, aut saltem non omnes communes, subrogato in utraque aequatione valore radi-

cis communis pro x , fieret utraque $= 0$, & nihilominus coefficientes utcumque inaequales esse possent, ac minime proportionales.

Satis sint haec dicta ad illustrationem methodi per universam Analysim magno emolumento usitatae, quae vulgo dicitur Methodus Indeterminatarum, a Cartesio primum incredibili Scientiae incremento in Analysim inducta.



DISQUISITIO XIII.

DE INFINITO LOGARITHMICO.

1. **I**N explicanda genesi quantitatum logarithmicarum & exponentialium magnitudines occurrere tum infinitas tum infinitesimas, hoc est assignabili qualibet majores minoresve, in¹ confesso est apud Auctores, qui hac de re accuratius defferuerunt, prae caeteris Magnus EULERUM in eximia *Ad Infinitorum Analysim Introductione Cap. VI. & VII., Tom. I.* Verum magnitudines illas infinitas infinitesimasque inaudita quadam planeque admiranda donari indole ac natura, propriasque notas & characteres singularitate mirifica insignes prae se ferre, id vero est quod Geometrarum haecenus nemo (quod ego sciam) suspicatus est.

2. Itaque harum quantitatum eam esse praecipuam notam ostendam, ut non modo quae infinitae sunt, infinities deprehendantur minores Infinito *primi ordinis*, quale exhibetur per infinitarum unitatum seriem $1 + 1 + 1 + \&c.$ *in infin.*, sed etiam infinito *ordinum* numero distent ab Infinito *ordinis primi*, utque hic infinitus *ordinum* numerus, quo infra *primi ordinis* Infini-

tum deprimuntur, sit rursus Infinitum distans infinito *ordinum* numero ab Infinito primo, atque iterum nova haec *ordinum* infinita distantia spectet ad infinitum, quod distat rursus numero *ordinum* infinito a primo; sicque porro semper, *neque enim*, magno NEWTONO ajente (a) *novit natura limitem*.

Sed quoniam probe intelligo, hos infinitorum ordines delicatissimi fastidii hominibus stomachum movere, ac vel ipsum *infiniti* vocabulum ludibrio esse, operae pretium me facturum existimo, si hac de re, ut nullus perversae interpretationi relinquatur locus, quid ipse sentiam, distincte dilucideque explicavero.

3. Itaque hac super re in sententiam eo amicissimi doctissimique KÄSTNERI, qui in exquisito Schediasmate *De Vera Infiniti Notione* (b) rem suapte natura retrusam & captiosis plurium Geometrarum tendiculis implicatam ea perspicuitate aperit enucleatque, ut nihil desiderandum relinquat. Affero ejus locum licet paullo longiorem tum quod multa egregia & singularia complectitur, tum quod melius ac pressius dici a me posse despero: » Antiquae Graeciae, inquit Cl. KÄSTNERUS, notum est hanc esse laudem, ut quae

(a) Princ. Lib. I. Sect. I. Lemm. XI. Schol.

(b) Vid. Abr. KÄSTNERI *Dissertat. Mathemat. & Physic.* ALTENBURGI 1771. *Dissert.* V.

pulchritudinis absolutae, eadem etiam certitudinis summae exemplaria nobis praebeat : igitur postquam inter Geometras percrebuit *Infiniti* nomen, paullo post CARTESIUM, qui illud adeo adhuc reformidabat, ut mallet *Indefiniti* vocabulo uti, fuerunt qui ostenderent, nihil illis de infinito adfertis contineri, quod non cum antiquorum placitis congrueret; alii laboris huius pertaes, ipsaque novitatis specie delectati theoriam quandam Infiniti commenti sunt multa continentem, quae in scriptis antiquorum versatus non possit non, sic ut ipsi ostenduntur, incredulus odisse. Ita FONTENELLIUS, ne scilicet severissimi eruditorum Geometrae fabula milesia plane carerent, de Infinito talem adornavit, in qua praeter alia jucundissima quantitates etiam reperiatis, quae nec finitae sint, nec infinitae, & quibus velut *pontibus* ex finito ad infinitum eatur. Sed, ut aequae vere ac jocosae observabat B. HAUSENIUS, non cogitavit, ut ad hos pontes ex finito transeatur, aliis pontibus opus esse. Quam veram judicem infiniti ideam, brevibus explicare liceat.... Infinite magnam vocant quantitatem, cujus incremento limes nullus statui potest, & quae major omni dabili concipitur; quod idem est ac si dicas ipsam non dari, alias dum omni quae datur major est, se ipsa major esset. Igitur *infinite magnum* non *quantitatis* nomen est, sed *possibi-*

litatis sine fine, & ultra omnes limites crescendi. Contra infinite parvum non quantitas est, sed ea quantitatis adfectio, qua sine limite decrescere, omnique proposita minor fieri potest.... Hoc sensu infiniti vocabulo tributo, nihil paradoxo omnibus de infinito adfertis contineri perspicitur, ut infinitum aliud alio majus immo infinities majus esse. Trianguli rectanguli angulus unus sit 30. graduum: igitur crus ei oppositum hypotenuse perpetuo dimidium erit, cujuscunque magnitudinis sint crus & hypotenusa. Potest autem crus data quavis recta majus sumi, & tunc hypotenusa duplo ejusdem rectae major fiet, quod dicunt crus infinitum fieri posse, ejusque infiniti duplam fieri hypotenusam. Ordinata parabola quadrato abscissae exprimitur parametro pro unitate assumpta, ut possint lineae ad numeros revocari: Potest autem abscissa numerum quemvis superare ejusque numeri quadratum superat ordinata, quod dicitur, ordinatam exprimi quadrato abscissae infinitae, adeoque illam infinities continere. Ita infinita aliis infinitis infinities majora intelliguntur.... Intelligitur simul verum Infiniti usum nihil continere, quod a communibus Geometrarum notionibus recedat. Qui in illo incomprehensibilia, & tantum non contradictoria reperiunt, ambiguitate verborum plerumque falluntur, & infinitum quod revera

adfectio quantitatis est, pro quantitate ipsa habent. Sed quas poetis, & reliquis, qui delectare volunt, scriptoribus severior critica interdixit dilogias, in illis ingenii gloriolam quaerere veri custodes Geometras parum decebit ». His ad mentem Viri acutissimi, qui rem acu tetigit, praemissis, omnique adeo cavillandi anfa sublata, redeo in viam.

4. Voco *Infinitem Ordinis Primi*, vel *Infinitem Primum*, vel simpliciter *Infinitem* illud, quod exsurgit ex serie unitatum semper continuata $1 + 1 + 1 + 1 + \&c.$ in *infin.*, vel ex continua repetitione magnitudinis cujuscumque determinatae $a + a + a + \&c.$ in *infin.*, sive quod repraesentatur ab expressionibus $\frac{1}{1 - 1}$, $\frac{a}{1 - 1}$. Quamvis enim alterum alteri sit inaequale, ratio tamen unius ad alterum finita est ac determinata, nimirum $1 : a$.

5. *Infinitem Primum* designabo littera n .

6. Appello *Infinitem Ordinis semper infinitesimi*, vel *Infinitem Paradoxum* illud, quod non modo infinities minus est Infinito Primo, sed ab eodem distat, vel infra ipsum deprimitur numero ordinum infinito, qui infinitus ordinum numerus non solum infinities est minor Infinito Primo, sed rursus ab eodem distat numero ordinum infinito; sicque porro semper.

7. *Infinitem Paradoxum* designabo littera p .

8. Data aequalitate $x^x = n$, facile ostenditur, nihil aliud esse posse x nisi *infinitem*, & quidem *infinitem paradoxum*, vel rationem habens finitam ad infinitum paradoxum p , vel denique rationem expressam ab alio infinito paradoxo respectu ipsius p , quemadmodum est p respectu infiniti primi: si enim *nullum novit natura limitem*, evidentissimum est, dari infinitum paradoxum p' respectu ipsius p , quemadmodum datur p respectu infiniti primi, atque hujusmodi esse p'' prae p' , p''' prae p'' , p^{iv} prae p''' , sicque porro sine fine. Li-

⋮

x

x

x

quet id, si assumatur aequalitas $x = n$, ubi x nequit esse aliud nisi infinitum paradoxum ordinis quantumlibet depressi infra infinitum paradoxum p ordinis primi.

9. Hinc, ut infinitum paradoxum x in infinitum primum convertatur, elevandum est ad potestatem, cujus exponens est infinitum ipsum paradoxum.

10. Hinc radix, cujus gradus est *infinitem paradoxum*,educta ex infinito primo, dat infinitum ipsum paradoxum.

11. Hinc denique logarithmus infiniti paradoxii abit in logarithmum infiniti primi divisum per infinitum ipsum paradoxum.

12. Dicatur e numerus, cujus logarithmus hyperbolicus aequatur unitati: & habetur sequens

THEOREMA I.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ seu } \left(\frac{1+n}{n}\right)^n = e.$$

D E M.

Formula $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ in seriem ad normam Binomii Newtoniani explicata assequimur $\frac{1}{n^n} \left(n^n + n \cdot n^{n-1} \right.$

$$+ \frac{n \cdot n - 1}{2} n^{n-2} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} n^{n-3} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} n^{n-4} + \&c. \Big).$$

Sed ob $n = \infty$ evanescunt prae ipso numeri 1, 2, 3, 4, &c., qui ab eodem demuntur. Igitur praedicta formula fit

$$\frac{1}{n^n} \left(n^n + n \cdot n^{n-1} + \frac{n^2}{2} n^{n-2} + \frac{n^3}{2 \cdot 3} n^{n-3} + \frac{n^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} n^{n-4} + \&c. \right) = \frac{1}{n} \left(n^n + n^n + \frac{n^n}{2} + \frac{n^n}{2 \cdot 3} + \frac{n^n}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c. \right)$$

V 3

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c.$$

Notum autem est, ex Logarithmorum Doctrina, esse

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c. = e. \text{ Igitur}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2, 71828183 = e. \text{ Q. E. D.}$$

13. Esto f numerus unitate major, k vero talis, ut inter f , & k haec habeatur aequatio $f = 1 + k$

$$+ \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2 \cdot 3} + \frac{k^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{k^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c. \text{ Hoc po-}$$

sito oritur

THEOREMA II.

$$f^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{k}{n}.$$

D E M.

Confectarium id est ex Capite VII. *Eulerianae Introductionis* tom. I. nullo negotio inferendum. Q.E.D.

THEOREMA III.

$$14. \quad \frac{1}{n} = 1 + \frac{p}{n} \quad *$$

D E M.

1.^o Nequit esse $n^{\frac{1}{n}} = 1$, secus foret $n = 1^n = 1$, quod est absurdum.

2.^o Nequit esse $n^{\frac{1}{n}} = 1 + g$ (sumpto pro g numero quolibet integro); secus foret $n = (1 + g)^n$: est autem $(1 + g)^n$ infinities major quam n , ut liquet evidentissime.

3.^o Nequit esse $n^{\frac{1}{n}} = 1 + \phi$ (designante ϕ numerum fractum quemcumque); hinc enim efficitur

$$n = (1 + \phi)^n = 1 + n\phi + \frac{n \cdot n - 1}{2} \phi^2 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} \phi^3$$

+ &c.; quod omnino repugnat, siquidem series

$$1 + n\phi + \frac{n \cdot n - 1}{2} \phi^2 + \&c. \text{ est manifeste in}$$

immensum major quam n .

* Pro p intellige vel infinitum ipsum paradoxum, de quo supra, vel id, quod ad infinitum paradoxum rationem habet finitam quamcumque, quodque adeo nomen idem *infiniti paradoxo* jure retinet.

4.^o Non potest denique esse $n^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{k}{n}$ (posito k finito); quandoquidem inde colligeretur $f^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}}$ §. 13., seu $f = n$, hoc est finitum aequale infinito.

Restat ergo, ut fiat $n^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{x}{n}$ existente x infinito, sed in immensum minore quam n . Hinc autem oritur $n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{n \cdot n - 1 \cdot x^2}{2n^2} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot x^3}{2 \cdot 3 n^3} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 n^4} + \&c.$ Sed ob $n = \infty$ fit $n - 1 = n$, $n - 2 = n$, $n - 3 = n$, &c. igitur $n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c.$ Inde vero consequens est, quantum x non modo infinitum esse infinities minus quanto n , sed spectare praeterea ad ordinem infinite humiliorem ordine ipsius n : nam in altero hujus aequalitatis membro ascendit x ad potestatem semper altiore[m] quo longius protrahitur evolutio binomii $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, idque sine fine. Ex hoc deni-

que facili ratiocinatione efficitur, non differre ∞ ab infinito paradoxo p. Q. E. D.

15. Peccatum itaque est ab ingeniosissimo FONTENELLIO in Opere alioquin elegantissimo *De Infiniti Geometria* (a), dum affirmate pronunciat, excessum quantitatis ∞ supra unitatem non esse infinitesimam quantitatem, sed omnino finitam. Esto jam

(a) Vid. FONTENELLE *Elemens de la Géométrie de l'Infini* §. 263. Vere de hoc Opere cetera elaboratissimo ALEMBERTUS in *Mél. de Littér. tom. V. §. XV.* la lecture en est d'autant plus dangereuse aux jeunes Géometres, que l'Auteur y présente ses sophismes avec une sorte d'élégance, & pour ainsi dire, de grace, dont le sujet ne paroïssoit pas susceptible. Il semble que les ouvrages géométriques de ce Philosophe soient destinés à produire sur les jeunes gens qui entrent dans la carrière des Sciences, le même effet que ses ouvrages de Belles-Lettres sur les jeunes Littérateurs, celui d'égarer les uns & les autres par des défauts d'autant plus propres à séduire, qu'ils se trouvent & agréables par eux mêmes, & joints d'ailleurs à des beautés réelles. Ceterum quicquid sit de hujus Operis lectione Tironibus interdicenda, nihil aptius, nihil verius de hoc geometrico FONTENELLII libro hinc acriter vexato, inde effuse laudato mihi dici posse videtur quam quod de SENECA *Institut. Lib. X. Cap. I.* QUINTILIANUS, abundat dulcibus vitis... verum sic quoque jam robustis, & severiore genere satis firmatis legendus, vel ideo, quod exercere potest utrumque judicium. Multa enim probanda in eo, multa etiam admiranda sunt: eligere modo curae sit, quod utinam ipse secisset. Digna enim fuit illa natura, quae meliora vellet, quae quod voluit effecit.

THEOREMA IV.

$$\text{Log. } n = p.$$

D E M.

Per Theor. III. est $n^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{p}{n}$. Igitur sum-

ptis Logarithmis fiet $\frac{1}{n} \log. n = \log. \left(1 + \frac{p}{n} \right)$. Est

autem ex Logarithmorum Doctrina $\log. \left(1 + \frac{p}{n} \right)$

$$= \frac{p}{n} - \frac{p^2}{2n^2} + \frac{p^3}{3n^3} - \frac{p^4}{4n^4} + \&c., \text{ haecque se-}$$

ries ob quantitatem $\frac{p}{n}$ infinitesimam non differt ab

ipsa $\frac{p}{n}$: iccirco consequitur $\frac{1}{n} \log. n = \frac{p}{n}$, hoc est

$\log. n = p$. Q. E. D.

A L I T E R.

Ex demonstratione Theorematis III. colligitur $n = 1$

$$+ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c. \text{ in } \textit{infin.} \text{ Jamvero}$$

series isthaec ex Logarithmorum Theoria numerum exprimit, cujus Logarithmus hyperbolicus est ipse x , nimirum

$$\text{est } x = \log. \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c. \right).$$

Igitur $x = \log. n$. Sed x non differt a p ,

ut patet ex Theorematis praecedentis demonstratione.

Ergo $x = p = \log. n$. Q. E. D.

17. Convergentiae defectus in serie $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$ demonstrationis secundo loco

allatae vim non infirmat eo quod seriei valor debet augeri sine fine, eoque magis quo longius illa protrahitur, ac tandem adaequare infinitum ipsum primum n .

Cave suspiceris, antilogiam reperiri inter hoc IV. Theorema, & §. 11., ubi logarithmus infiniti primi declaratur aequalis non infinito soli paradoxo, sed facto ex hoc ipso, & ejus logarithmo. Ibi enim *infiniti paradoxo* genesis deducta est ab aequalitate $x^x = n$,

quae, ut notum est, parit $n = 1 + x \log. x + \frac{x^2 \log^2 x}{2}$

$$+ \frac{x^3 \log^3 x}{2 \cdot 3} + \frac{x^4 \log^4 x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c. ; \text{ hic vero dedu-}$$

$$\text{cta est ab aequalitate } n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3}$$

$$+ \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c. ; \text{ unde manifeste colligitur } x' = x \log x$$

$= \log n$, quod antilogiam omnem amovet. Id ipsum perspicue infertur ex harum etiam serierum indole;

$$\text{prior enim } 1 + x \log x + \frac{x^2 \log^2 x}{2} + \frac{x^3 \log^3 x}{2 \cdot 3}$$

$$+ \frac{x^4 \log^4 x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c. \text{ numerum repraesentat, cujus lo-}$$

garithmus hyperbolicus est ipse $x \log x$, altera vero

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \&c. \text{ numerum exprimit, cu-}$$

jus hyperbolicus logarithmus est x' . Igitur $\log n = x \log x = x' = p$.

THEOREMA V.

Tab.III. 18. Capti in Hyperbola Apolloniana OGK asym-
ptoti partibus $AB, AC, AD, AE, \&c.$ continue pro-
Fig.13. portionalibus sine fine ita ut evadat $AS = \text{infinito}$

primo n , erectisque alteri asymptoto parallelis BG , CH , DI , EK , &c. in infin.; ajo, numerum spatiorum inter se aequalium $GBCH$, $HCDI$, $IDEK$, &c. in infin. non differre ab infinito paradoxo p .

D E M.

Constat, eorum spatiorum inter se aequalium numerum, quem voco x , aequari numero terminorum progressionis geometricae, productae usque ad terminum AS sive n , dempta unitate. Est autem ex Pro-

$$\begin{aligned} \text{gressionum Doctrina } \frac{AS}{AB}, \text{ seu } \frac{n}{AB} &= \left(\frac{AC}{AB} \right)^x \\ &= \left(\frac{AB + BC}{AB} \right)^x = \left(1 + \frac{BC}{AB} \right)^x = 1 + x \cdot \frac{BC}{AB} \\ &+ \frac{x \cdot x - 1}{2} \times \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2}{2 \cdot 3} \times \frac{BC^3}{AB^3} \\ &+ \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \times \frac{BC^4}{AB^4} + \&c.; \text{ ac prae-} \end{aligned}$$

terea valor $\tau_8 x$ nequit esse nisi infinitus, ut patet: Igitur ducto utroque aequalitatis membro in AB , neglectisque numeris 1, 2, 3, &c. ab x auferendis, fiet

$$\begin{aligned} n &= AB + x \cdot BC + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{BC^2}{AB} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{BC^3}{AB^2} \\ &+ \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{BC^4}{AB^3} + \&c. \text{ Quapropter traductis huc prae-} \end{aligned}$$

cedentibus ratiocinationibus palam est, valorem $\tau\tilde{x}$ x spectare ad *infinitum* aliquod *paradoxum* p. Q. E. D.

C O R.

Hinc consequitur, spatium hyperbolico-asymptoticum $GBSK$ sine fine protractum esse *infinitum paradoxum* respectu infinitae asymptoti AS ductae in rectam quamlibet finitam. Esto demum

T H E O R E M A VI.

19. In progressionem geometricam crescente $\frac{b}{a}$ a, b , $\frac{b^2}{a^2}, \frac{b^3}{a^3}, \dots, \frac{b^x}{a^{x+1}}$ eo usque producta, ut terminus $\frac{b^x}{a^{x+1}}$ evadat $= n$, ajo terminorum numerum $x - 1$, adeoque & x *infinitum* esse *paradoxum* respectu ipsius n .

D E M.

Ob progressionem geometricam crescentem erit $b = a + c$. Ergo $\frac{b^x}{a^{x+1}} = \frac{a b^x}{a^{x+1}} = a \left(\frac{a+c}{a} \right)^x = a \left(1 + \frac{c}{a} \right)^x$
 $= a \left(1 + \frac{xc}{a} + \frac{x \cdot x - 1 \cdot c^2}{2a^2} + \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot c^3}{2 \cdot 3 a^3} \right.$
 $\left. + \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - 3 \cdot c^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 a^4} + \&c. \right) = n$
 per hypothesim. Ergo &c. Q. E. D.

THEOREMA VII.

20. Sint a, b numeri quilibet finiti; & $\left(\frac{a+b}{a}\right)^x = n$: ajo, esse x infinitum aliquod paradoxum.

D E M.

Explicato Binomio $\left(\frac{a+b}{a}\right)^x$ in seriem oritur $1 + \frac{x \cdot b}{a} + \frac{x \cdot x - 1 \cdot b^2}{2 a^2} + \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot b^3}{2 \cdot 3 a^3} + \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - 3 \cdot b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 a^4} + \&c. \text{ in infin. } = n.$

Nequit autem esse exponens x nisi infinitus, ut patet, secus aequalitas $\left(\frac{a+b}{a}\right)^x = n$ omnino repugnaret.

Ergo praedicta series mutabitur in $1 + \frac{x \cdot b}{a} + \frac{x^2 \cdot b^2}{2 a^2} + \frac{x^3 \cdot b^3}{2 \cdot 3 a^3} + \frac{x^4 \cdot b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 a^4} + \&c. = n.$ Atque hinc eadem, qua supra, ratiocinatione efficitur, exponen-tem x nihil aliud esse posse nisi infinitum aliquod paradoxum. Q. E. D.

21. Ex positione $\left(\frac{a+b}{a}\right)^x = n$ consequitur

$\left(\frac{a}{a+b}\right)^x = \frac{1}{n} =$ infinitesimo primi ordinis. At hic

posset quispiam offendere propter antilogiam, quae inopinato se offert: nam si fiat $a+b=c$, adeoque $a=c-b$,

habetur $\frac{1}{n} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^x = \left(\frac{c-b}{c}\right)^x$; & fu-

iscepta evolutione binomii $\left(\frac{c-b}{c}\right)^x$ reperitur $\frac{1}{n} =$

$$1 - \frac{x \cdot b}{c} + \frac{x \cdot x - 1 \cdot b^2}{2c^2} - \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot b^3}{2 \cdot 3 \cdot c^3}$$

$$+ \frac{x \cdot x - 1 \cdot x - 2 \cdot x - 3 \cdot b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c^4} - \&c. \text{ in infin.} = 1 -$$

$$\frac{x \cdot b}{c} + \frac{x^2 \cdot b^2}{2c^2} - \frac{x^3 \cdot b^3}{2 \cdot 3 \cdot c^3} + \frac{x^4 \cdot b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot c^4} - \&c. \text{ in infin.}$$

In hac vero serie termini singuli post primum sunt infinite magni, & quidem perpetuo crescentes: consequenter $\frac{1}{n}$, hoc est infinitesimum reperitur aequale infinito; quod certe immane est absurdum. At cum reputo, ~~seriei terminos esse alternis vicibus affirmati-~~ vos & negativos, proindeque alios ab aliis ita elidi posse, ut tota summa evadat infinitesima, nullam amplius invenio antilogiam. Confirmo id exemplo ex finitis magnitudinibus petito: Evolvatur in seriem Binomium $(1-y)^{10}$, ut fiat $1 - 10y + 45y^2 - 120y^3 + \&c.$ Tum capiatur $y = 0, 9$; eritque $(1-y)^{10} = (0, 1)^{10} =$

$$1 - 9 + 45 \cdot 0, 81 - 120 \cdot 0, 729 + \&c. =$$

$$1 - 9 + 36, 45 - 87, 480 + \&c.$$

Evidentissimum est, numerum satis magnum negativum, qui oritur ex collectione horum quatuor primorum seriei terminorum, destrui omnino per adjunctionem sequentium ita ut omnes collecti minimam fractionem $(0, 1)^{10}$ repraesentent.

Id ipsum Cl. KÄSTNERUS, quem hac de re consulebam, urbane respondebat GOTTINGA prid. Kal. Oct. ann. 1777., subdebatque Vir optimus, *nulla se offert contradictio, etsi quomodo id, quod series enunciat, cum aliis veris cohaereat, paullo difficilius perspiciatur: omnino ut in Mysteriis Religionis Christianae, quae non vituperarent qui saeculo nostro sapere sibi videntur, si quantum insit mysteriorum non solum in rerum natura, sed in ipso intellectu systemate, quo Geometria continetur, percepissent.*

Ceterum hujus terminorum elisionis in seriebus algebraicis, in quibus ea minus apparet, luculentissimum mihi offert exemplum Newtoniana decantata

$$\text{series } (P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ \\ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \&c. \text{ Si enim educenda} \\ \text{proponatur radix quadrata ex quadrato perfecto } a^2$$

$+ 2ab + b^2$, quam radicem scimus esse $a + b$, fiatque

ideo $P = a^2$, $Q = \frac{2ab + b^2}{a^2}$, $m = 1$, $n = 2$, oritur

radicis quæritæ valor expressus per seriem $a + \frac{1}{2}a \times$

$$\left(\frac{2ab + b^2}{a^2}\right) - \frac{1}{8}a\left(\frac{2ab + b^2}{a^2}\right)^2 + \frac{1}{16}a\left(\frac{2ab + b^2}{a^2}\right)^3$$

$$- \frac{5}{128}a\left(\frac{2ab + b^2}{a^2}\right)^4 + \&c. \text{ Jamvero nemo initio}$$

cogitaverit, seriem hanc nullibi interruptam & in infinitum

progredientem contrahi in duos tantummodo terminos

$a + b$, uti res postulat. Attamen si evolvantur pote-

states $\left(\frac{2ab + b^2}{a^2}\right)^2$, $\left(\frac{2ab + b^2}{a^2}\right)^3$, $\left(\frac{2ab + b^2}{a^2}\right)^4$,

&c. perspicue apparebit, ita se invicem destruere se-

riei terminos, alios post alios, ut soli supersint prio-

res bini $a + b$.



Ramus sc.

DISQUISITIO XIV.

*DE PERCUSSIONE, AUT RESISTENTIA,
QUAM GLOBUS A FLUIDO IMPIN-
GENTE, VEL IMPACTO PATI-
TUR, PER EXPERIENTIAM
DEFINIENDA.*

I. **N**Ullus huc usque fuit in universa Hydrodyna-
mica locus acrioribus Geometrarum studiis diffidiisque
vexatus quam is qui refertur ad celeberrimam illam
de Percussione Fluidorum controversiam, quae post-
quam per septuaginta & amplius annos summos Vi-
ros in partes distraxit, novissime tandem per accura-
tissima Regiis sumptibus ab illustrioribus Galliae Phi-
losophis capta pericula videtur maximam partem di-
rempta, & quasi electis a tota Europa Arbitris dijudi-
cata & composita (a). Ex hisce demum experimen-

(a) Vid. *Nouvelles Expériences sur la Résistance des Fluides*,
par MM. D'ALEMBERT, le Marquis DE COMDORCET, &
l'Abbé BOSSUT Mr. l'Abbé BOSSUT, Rapporteur.
Paris 1777.

tis certo constitit, & quasi sacra Legum sanctione firmatum fuit, 1.^o Resistentias, quas corpus figura qualibet praeditum, & variis velocitatibus in fluido infinito latum patitur, esse quamproxime quadratis velocitatum proportionales; & hac in re Experientiam cum Theoria prope consentire. 2.^o Resistentias perpendiculares ac directas, quas planae superficies eadem velocitate motae patiuntur, esse fere superficierum magnitudinibus proportionales; & hic quoque Theoriam, atque Experientiam satis concordare esse. 3.^o Resistentias ab obliquis motibus provenientes rationem sequi longe diversam a ratione duplicata sinuum angulorum incidentiae, & consequenter Experientiam hic magno-pere dissidere a Theoria, quae obliquam Resistentiam quadrato sinus incidentiae ponit proportionalem (b). 4.^o Mensuram absolutam Resistentiae perpendicularis

(b) Lego nunc in Litteratorum Diariis, clarissimum BOS-SUT anno superiore 1779. exeunte coram Parisiensi Scientiarum Academia praelegisse commentariolum, in quo novis allatis experimentis, obliqui fluidorum impactus legem theoretice constitutam, sed usu mendosam ita emendat castigatque, ut obli-quas resistentias proportionales statuatur non quadratis tantum sinuum angulorum incidentiae, ut vulgaris ferebat lex, sed proportionales sinuum quadratis una cum potestatibus $3 \frac{1}{4}$ ^{is} cosinum angulorum eorundem.

& directae, cui planum in fluido homogeneo & indefinito progrediens obijcitur, sat proxime haberi ex pondere columnae ipsius fluidi, cujus columnae basis aequatur plano in fluidum incurrenti, altitudo vero ea est, quae debetur plani velocitati, ex qua nimirum grave a quiete libere decidens velocitatem acquirit plani velocitati aequalem.

2. Everfa porro vulgari obliquorum impactuum lege de resistentiae quadrato sinus incidentiae proportionali illud consequens erat, ut curvarum superficierum resistentiae per eandem legem theoretice definitae ab iis valde discreparent, quas experientia demonstrat. Atque hinc resistentia Globi, quam resistentiae baseos dimidiam Theoria exhibet, incerta adhuc erit minimeque explorata, donec experimentis data opera institutis in lucem protracta fuerit, & citra omnem ambiguitatem constabilita. De experimentis dicam mox, nunc Globi resistentiam theoretice, sed via ab aliis paullulum diversa proponam.

3. Sit itaque BCO quadrans areae circularis, Tab.III. if-
que convertatur circa semidiametrum immotam BC ,
ita ut ex conversione areae oriatur hemisphaerium, & Fig.12.
ex conversione arcus quadrantalis BO producatu-
r superficies hemisphaerica. Capto jam arcu infinitesimo Pp ,
ductisque in semidiametrum CO perpendiculis PG ,

$p g$, evidens fit, ex rotatione minimi arcus $P p$ gigni zonam *elementarem* superficiei hemisphaericae, & ex rotatione lineolae $G g$ gigni zonam *elementarem* circularis baseos hemisphaerii. Liquet autem, utramque zonam ab eodem numero filamentorum fluidi secundum directionem $P G$ incurrentis impelli; & consequenter ictum contra priorem zonam ex $P p$ ortam ita se habere ad ictum contra zonam alteram genitam ex $G g$ quemadmodum se habet sinus anguli, sub quo percussio fit contra $P p$ ad sinum anguli, sub quo pulsatur $G g$, seu ad sinum totum: sunt vero sinus horum angulorum uti $P G$ ad $C O$: ergo impactus obliquus in zonam sphaericam ex $P p$ ortam est ad impactum directum in zonam circularem ex $G g$ productam sicuti est $P G$ ad $C O$. Si nunc accipiat $P G = y$, $C G = x$, $C O = r$, & ratio diametri ad peripheriam circuli dicatur $1 : \pi$, invenitur zona circularis ex $G g$ orta $= 2 \pi x dx$; haecque quantitas haberi jure potest pro mensura ictus contra zonam ipsam circularem. Ex hoc consequitur, ictum zonae sphaericae ex $P p$ genitae esse $= \frac{2 \pi y x dx}{r}$. Quamobrem integrale istius

quantitatis $\frac{2 \pi y x dx}{r}$ exprimet ictum contra superficiem sphaericam indefinitam ex rotatione arcus inde-

terminati BP productam. Invenitur porro hujusmodi integrale, si ex proprietate circuli loco y subrogetur ipsius valor $\sqrt{(r^2 - x^2)}$; ex quo fit $\int \frac{2\pi y x dx}{r}$

$$= \int \frac{2\pi x dx \sqrt{(r^2 - x^2)}}{r} = -\frac{2\pi}{3r} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$
 $+ \text{Const.}$; cumque ictus sit nullus evanescente arcu BP, vel etiam x , eruitur $\text{Const.} = \frac{2}{3} \pi r^2$; proindeque impactus contra superficiem sphaericam indeterminatam ex rotatione arcus BP genitam prodit $= \frac{2}{3} \pi r^2 - \frac{2\pi}{3r} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$. Igitur sumpto pro BP arcu quadrantali BO, vel, quod idem est, r pro x , oritur $\frac{2}{3} \pi r^2 =$ impactui contra superficiem hemisphaericam. Et quoniam impactus contra hemisphaerii basim, seu contra circulum radio CO descriptum exprimitur ab ipsius circuli area $= \pi r^2$, inde efficitur, percussionem hemisphaericae superficiei aequari duabus tertiis partibus percussionis, quam basis excipit.

4. Verum haec, quam dixi percussio, *ex toto* atque integra exercetur contra hemisphaericam superficiem, hujusque *integrae* percussionis pars dumtaxat est impulsio illa, quae in superficie percussa motum conatur imprimere tendentem secundum directionem PG, vel BC fluidi impellentis. Impulsionem hanc alteram

unice spectarunt haecenus tum Geometrae, tum Physici, qui eandem vel ratione, vel experientia quaesivere. Qua in re videtur paullulum hallucinatus vir caetera gnavus & perspicax 's GRAVESANDIUS, qui dum geometricè demonstrat, percussionem hemisphaericae superficiei *integram* duobus trientibus percussionis baseos aequari, in hujus Theorematis confirmationem experimenta profert, quae non ad priorem *integram* percussionem, sed ad alteram *partialem* referuntur, quemadmodum rem diligenter consideranti palam fit (c). Ipse quoque Cl. LECCHIUS, vir si quis alius consideratus & sagax, percussionem utramque confundens fidenter pronunciat, percussionem superficiei hemisphaericae ideo GRAVESANDIO obvenisse subsesquialteram percussionis baseos, non autem dimidiam ut BERNOULLIO aliisque, quod in sua demonstratione pro quadrato sinus incidentiae simplicem sinum usurpavit (d). Attamen re acrius excussa & enucleata perspicuum fit, ubi superficies duae utcumque inaequales altera oblique, altera perpendiculariter ab eodem filamentorum fluidi incurrentis numero pulsantur, percussionem in superfi-

(c) Vid. *Physicae Elementa Mathematica* Jac. 's GRAVESANDE tom. I. Lib. III. Cap. XV.; sed consulenda editio quarta LUGDUNI BATAVORUM ann. 1748.

(d) Vid. *LECCHI Idrostatica esaminata ne' suoi Principi* Parte I. Esame VI.

ciem obliquam ad percussionem in superficiem normalem vel esse simpliciter uti est sinus incidentiae ad sinum totum, vel conjunctim uti obliqua superficies ad normalem, & quadratum sinus incidentiae ad quadratum sinus totius: nam haec ratio composita ex ratione superficierum, & ex ratione duplicata sinuum incidentiae in hac hypothese percussionis ab eodem filamentorum numero factae perfecte congruit cum ratione illa simplici sinuum, cui demonstrationem suam GRAVESANDIUS superstruxit.

5. Porro percussio altera *partialis*, quae Globo motum conatur imprimere secundum directionem BC, vel PG fluidi impellentis, ita ex dictis expedite detegitur: Percussio *tota* in zonam genitam ex conversione minimi arcus Pp inventa est $= \frac{2 \pi y x dx}{r}$;

haecque urget zonam ipsam secundum directionem normalem PC, seu sphaerae radium, ad quam directionem reducta semper concipitur fluidorum pressio quaevis, cum ejus quantitas indagatur, quemadmodum Mechanici norunt. Capiatur $PM = \frac{2 \pi y x dx}{r}$, eaque resolvatur in vires duas ad se invicem normales MN, NP. Harum virium prior MN motum globi secundum PG nec adjuvat prorsus, nec impedit, eamque

praeterea elidit vis altera aequalis & opposita in secundo quadrante BA. Superest igitur vis sola PN, quae globum urget juxta fluidi impellentis directionem. Quum porro sit

$$PC : PG :: PM : PN$$

$$r : y :: \frac{2\pi y x dx}{r} : PN;$$

oritur vis $PN = \frac{2\pi y^2 x dx}{r^2}$. Hac vi tendit secundum PG zona ex Pp orta, & a fluido pulsata, vel eadem vi resistitur juxta PG zonae ipsi fluidum impingenti. Quamobrem si integrale accipiatur quantitatis

$\frac{2\pi y^2 x dx}{r^2}$, dabit hoc percussione*m* *partialem*, vel

resistentiam secundum PG superficiei indefinitae ex rotatione arcus BP genitae. Quum vero sit $y^2 = r^2 - x^2$,

invenitur $\int \frac{2\pi y^2 x dx}{r^2} = \int \frac{2\pi (r^2 - x^2) x dx}{r^2}$

$= \pi x^2 - \frac{\pi x^4}{2 r^2}$ sine ulla Constanti ob simultaneam

tum percussione*s*, tum variabilis x evanescentiam. Itaque sumpta $x = r$, exprimitur a quanto $\frac{1}{2} \pi r^2$ percussio vel resistentia *partialis* secundum PG exercita contra superficiem totam hemisphaericam, vel si mavis contra Globum. Haec igitur resistentia dimidia est

ejus, quam sustinet hemisphaerii basis, seu circulus Globi maximus.

6. Inventa per Theoriam relatione inter Globi, & circuli maximi resistentias, videndum nunc quatenus doctorum experimenta Hydraulicorum ad hanc rem capta Theoriae cohaereant vel aduersentur. Ad hujus argumenti illustrationem experimenta sumpsere GRAVESANDIUS (e), & Eques De BORDA (f).

Resistentia Globi se habet ad resistentiam
circuli maximi

Secundum experimenta GRAVESANDII

uti

2 : 3

Secundam Theoriam

uti

2 : 4

Secundum experimenta Equitis De BORDA

uti

2 : 5.

Tanta tamque insolens experimentorum a binis Viris scientissimis institutorum discrepantia scrupulum injicit, machinamentis usos paullo implicatioribus non po-

(e) Loc. cit.

(f) Vid. bina hujus excellentis Geometrae *De Resistentia Fluidorum* Opuscula in *Mem. de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris* ann. 1763. & 1767.

tuisse effectum fatis expurgatum sincerumque extor-
 quere, indeque germanam & accuratam resistentiae
 aestimationem elicere. Suspicio invalescit, si illarum
 machinarum structura & compages particulatim exa-
 minetur, quidve perturbationis ex multiplici impedi-
 mentorum genere oriri debeat subtiliter expendatur.

7. Ad dirimendam itaque quaestionem adhuc flu-
 ctuantem incertamque presto mihi se offert usus Qua-
 drantis Hydrometrici, omnium Hydraulicae instru-
 mentorum simplicissimi ac paratissimi. Enimvero si in
 canali recto, cujus aquae cursus sit fatis compositus &
 horizontalis, exploretur per corpus aquae innatans
 certumque spatium certo tempore peragrans velocitas
 superficialis; tumque Quadrantis globus filo suspensus
 vix intra aquae superficiem demergatur, & *deviationis*
 angulus, quem globi filum cum verticali constituit,
 diligenter inspiciatur, ex cognitis hujus anguli magni-
 tudine, & velocitate aquae superficiali licebit per
 formulam elegantem, quam mox proponam, veram
 resistentiae globi mensuram expiscari.

8. Ut id consequaris, pone
 Semidiametrum globi filo suspensi = r

Ejus pondus extra aquam = p

Pondus intra aquam = q

Angulum Deviationis fili globum
sustinentis a directione verticali = ϕ

Velocitatem aquae superficialis singulis
secundis, seu spatium singulis secundis
ab aqua superficiali decursum = c

Spatium, quod grave libere a quiete
decidens primo temporis minuto se-
cundo transcurrit, nimirum ped. paris.

$15 \frac{1}{2}$ = g

Ratio diametri ad peripheriam circuli . . . = $1:\pi$

Jam vero exploratum est, impulsus aquae in Qua-
drantis globum esse ad globi pondus intra aquam
quemadmodum est sinus ad cosinum *deviationis*; hoc est

$\cos. \phi : \sin. \phi :: q : \frac{q \sin. \phi}{\cos. \phi}$. Est igitur impulsus in glo-

bum = $\frac{q \sin. \phi}{\cos. \phi} = q \tan. \phi$. Porro experimenta Gal-

lorum §. 1. indicata haud dubie decernunt ac fanciunt,
impulsus aquae in circulum globi maximum ponderi
aequipollere talis aqueae calumnae, quae basim habeat
circulo maximo aequalem, altitudinemque parem illi,
quae *debita* est aquae impellentis celeritati. Quam-
obrem, quoniam ex motus aequabiliter accelerati Do-
ctrina altitudo *debita* celeritati irruentis aquae inveni-

tur $= \frac{c^2}{4g}$, circulus vero maximus $= \pi r^2$; fit columnae

praedictae volumen $= \frac{\pi r^2 c^2}{4g}$. Est autem volumen glo-

bi $= \frac{4\pi r^3}{3}$, & paris globi aquei pondus $= p - q$,

suntque praeterea materiae homogeneae pondera inter
se quemadmodum volumina; habetur iccirco

$$\frac{4\pi r^3}{3} : \frac{\pi r^2 c^2}{4g} :: p - q : \frac{3c^2(p - q)}{16gr}.$$

Ergo columnae pondus, & huic ponderi aequipollens
circularis plani aquae incursum perpendiculariter exci-

ipientis resistentia oritur $= \frac{3c^2(p - q)}{16gr}$. Dico nunc

x numerum exprimentem rationem quaesitam inter
resistentiam globi, & resistentiam circuli maximi;
habeoque analogiam

$$x : 1 :: q \text{ tang. } \varphi : \frac{3c^2(p - q)}{16gr},$$

unde tandem elicio $x = \frac{16grq \text{ tang. } \varphi}{3c^2(p - q)}$.

9. Cognitis itaque ac sedulo definitis 1^o femi-
diametro globi; 2^o ejus pondere tum extra, tum intra
aquam; 3^o ejusdem *deviatione* a perpendiculo; 4^o aquae
in recto canali aequabiliter fluentis velocitate superfi-
ciali, quod per corpus aquae innatans commode ac-
curateque perficitur; invenitur statim ope superioris
formulae sane simplicissimae proportio illa resistentia-
rum globi, & circuli maximi, quae distractos adhuc
sollicitosque habet Hydraulicae coryphaeos. Opportu-
ne ad rem nostram diverso licet consilio experientissi-
mus SUECIAE Physicus ELVIUS accuratione Gentis suae
propria experimentum cepit, quod si ad formulam no-
stram exigatur quaesitam proportionem luculenter pa-
tefacit (g). Quadranti Hydrometrico globum aptavit
osseum, cujus diameter = 0,17 ped. Suec., pondus ex-
tra aquam = 2397 ass., intra aquam = 987. Tum
in fluviolo cursus aequabilis inventa ope corporis in-
natantis velocitate aquae superficiali pedum Suec.
2,086 singulis secundis, exploravit angulum *deviationis*
globi, superficie tenus demersi, a perpendiculo, huius-
que anguli tangentem = $\frac{2}{17}$ reperit. Est igitur

(g) Vid. *Der Königl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften Abhandlungen, auf das Jahr 1741. Aus dem Schwedischen übersetzt von Abraham Gotthelf KÄSTNER* tom. III., ubi occur-
rit ELVII Commentariolus inscriptus *Wie die Geschwindigkeit des Wassers zu messen ist, von P. ELVIUS.*

$$2r \dots \dots \dots = 0, 17 \text{ ped. Succ.}$$

$$p \dots \dots \dots = 2397 \text{ aff.}$$

$$q \dots \dots \dots = 987 \text{ aff.}$$

$$p - q \dots \dots \dots = 1410$$

$$g \dots \dots \dots = 16 \text{ ped. Succ.}$$

$$c \dots \dots \dots = 2, 086 \text{ ped. Succ.}$$

$$\text{tang. } \phi \dots \dots \dots = \frac{2}{17}$$

$$\log. 2r \dots \dots \dots = 0, 2304489$$

$$\log. 8 \dots \dots \dots = 0, 9030900$$

$$\log. q \dots \dots \dots = 2, 9943172$$

$$\log. g \dots \dots \dots = 1, 2041200$$

$$\log. \text{tang. } \phi \dots \dots \dots = 9, 6146491$$

$$\log. 16grq \text{ tang. } \phi \dots \dots \dots = 3, 9466252$$

$$\log. 3 \dots \dots \dots = 0, 4771213$$

$$\log. c^2 \dots \dots \dots = 0, 6386286$$

$$\log. (p - q) \dots \dots \dots = 3, 1492191$$

$$\log. 3c^2 (p - q) \dots \dots \dots = 4, 2649690$$

$$\log. \frac{16grq \text{ tang. } \phi}{3c^2 (p - q)} \dots \dots \dots = 9, 6816562$$

$$\frac{16grq \text{ tang. } \phi}{3c^2 (p - q)} \dots \dots \dots = 0, 48046$$

Habemus igitur $x = 0,48 = \frac{1}{2}$ fat proxime; unde consequens fit, resistantiam globi dimidiam esse resistantiae circuli maximi; quod quidem quam parum cum experimentis GRAVESANDII, & De BORDA cohaeret, tam mirifice Theoriae consonat.

10. Postremo quamvis in canali ad rem experientiam electo aquae cursus minime foret horizontalis, sed horizonti inclinatus, ut plerumque usuvenit, id tamen experimenti exitum nequaquam turbaret. Dicto enim λ inclinationis angulo, & prioribus retentis denominationibus, ex Mechanicae elementis consequitur, esse actionem aquae in globum ad ejus pondus intra aquam quemadmodum est sinus anguli *deviationis*, ad cosinum summae angulorum *deviationis*, & *inclinationis*, seu $\cos. (\varphi + \lambda) : \sin. \varphi :: q : \frac{q \sin. \varphi}{\cos. (\varphi + \lambda)}$.

Inventa igitur globi resistantia $= \frac{q \sin. \varphi}{\cos. (\varphi + \lambda)}$, &

circuli maximi resistantia $= \frac{3c^2(p - q)}{16gr}$, si fiat, ut

prius, $x : 1 :: \frac{q \sin. \varphi}{\cos. (\varphi + \lambda)} : \frac{3c^2 (p - q)}{16gr}$, colligitur

$$x = \frac{16grq \sin. \varphi}{3c^2 (p - q) \cos. (\varphi + \lambda)} ; \text{quod quaesitam pro-}$$

portionem resistentiarum globi, & circuli maximi in aperto ponit.



Ramus sc.

DISQUISITIO XV.

DE HORA CALORIS MAXIMI INTRA DIEM, DEQUE DIE CALORIS MA- XIMI INTRA ANNUM.

I. **I**N prima Disquisitione indicavimus quid Geometrae nominis celebritate clarissimi HALLEIUS, & SIMPSONIUS in tractando Problemate de Caloris Solaris mensura pro viribus praestiterint, & quam quisque symbolam ad illius enodationem contulerit. Sed praeter inclyta ab illis elucubrata, & memoriae litterarum consignata opuscula, MAIRANUS rerum physicarum speculator ingeniosus & industrius de hoc ipso argumento semel, iterum, ac tertio differuit eleganter more suo ac copiose in Actis Parisiensis Scientiarum Academiae, ubi rem physicae tantum indagini subjecisse contentus, Physicumque agens, non Physico-Mathematicum ab analyticis calculis vel consulto abstinuit, vel in illos vix se insinuavit (a). Horum Virorum conatibus accessit clarissimi Batavi Philosophi Johannis LU-

(a) *Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris ann. 1719., 1741., 1765.*

LOFII industria, cujus elaboratum Opus Batavico idiomate exaratum, & a celeberrimo KÄSTNERO germanice versum & auctum, id est *Introductio ad Mathematicam & Physicam Telluris Cognitionem*, Part. II. Cap. VI. multa & varia de hoc argumento complectitur cum ingeniose disputata, tum inventa subtiliter, quae & Physici curiositatem explere possunt, & Mathematici religioni satisfacere (b). KÄSTNERUS ipse plura hac de re habet cum in adnotationibus ad eum locum Operis Lulofiani, tum potissimum in *Miscellaneis Hamburgicis* (c), ubi perspicuitate sibi adeo familiari omnia huc spectantia exponit & ad trutinam expendit. Novissime Upsaliensis Astronomus Fridericus MALLETUS in exquisita opella *De Generali, seu Mathematica Telluris Descriptione* (e) elegantissimam protulit hujus Problematis solutionem tum in hypothesi

(b) Johann LULOFS Einleitung zu der mathematischen und physikalischen Kenntniß der Erdkugel aus dem Holländischen übersetzt von Abraham Gotthelf KÄSTNER, GÖTTINGEN und LEIPZIG 1755. in 4.^o §. 575.

(c) HAMBURG. Magaz. II. Buch 4. St., und VIII. Buch 6. St. 5. Art. 613. St.

(e) Allgemeine oder Mathematische Beschreibung der Erdkugel, auf Veranlassung der Cosmographischen Gesellschaft verfaßt von Friedrich MALLET, aus dem Schwedischen übersetzt von LAMPERT Hinrich RÖHL, GREIFSWALD 1774. §. 62.

caloris aucti in ratione simplici sinus incidentiae, tum in hypothefi altera rationis illius duplicatae; sed rem delibasse contentus, & *caloris comparisonem in reliquis terrestribus latitudinibus praeterquam sub Aequatore, & Polo* (ut ipse ait) *erueri se posse* desperans investigationem vix inchoatam abruptit.

Mirum porro fuisset ac prorsus insolens, si tot tantarumque rerum vel inventor, vel illustrator EULERUS, qui nullam Matheseos partem, quam immensa est, non excoluit, nullamque excoluit, quam non ditaverit vel perfecit (g), quaestionem nobilissimam tantoque dignam Geometra silentio praeteriisset; neque sane praeteriit, nam in Actis veteribus Petropolitanae Academiae (h) ad rem aggressus summa, qua semper solet, sagacitate in altissimam se conjiciens analysim solutionem Problematis dedit si minus commodam & elegantem, exquisitam certe & acutissimam.

2. Verum horum praecellentium Hominum nemo cogitavit de Problemate altero cognato & affini, utilitatisque plurimum & subtilitatis habente, quo definienda proponitur hora diei, in qua aestivus solis ca-

(g) Ita de EULERO vere candideque pronunciat Geometra alius acerrimi ingenii CONDORCETUS tom. III. *Supplément à l'Encyclopédie art. Indéterminés.*

(h) *Comment. Acad. Petrop.* tom. XI.

lor maxime intenditur, tumque porro anni tempus aut dies, in quo prae caeteris omnibus diebus aer maxime incalescit. Equidem intelligo, Eulerianas formulas rite tractatas per implexas supputationum inextricabilium ambages huc quoque pertingere; at homo modestissimus non dubitat affirmare, *formulae istae tantopere sunt compositae & perplexae, ut ex iis vix quicquam concludi queat*. Ad eas autem tractabiliores efficiendas & ad usum magis idoneas cogitur Vir summus hypotheses admittere a veritate rerumque natura abhorrentes: *quamobrem (subdit ille) ut aliquid ad utilitatem derivare queamus, necesse est aliquantum a veri similitudine recedere*. Inde vero ad praeposteram conclusionem perductus, quod fane erat a minus vera hypothesis expectandum, sine latebris & circuitu verborum rotunde concludit, *maximus ergo calor meridianus, pariter ac maximum frigus incident post solstitia; at discrimen ne unicum quidem diem adaequat, ita ut satis tuto ipsa solstitia pro momentis, in quibus calor meridianus tum sit maximus, tum minimus haberi queant*. Quod si cum observationibus minus congruat, id hypothesis a veritate nimium aberranti est tribuendum. Haec ille, cui de accurata & perfecta Problematis solutione desperanti, deque frustra tentata omnium analyseos artificiorum applicatione pro-

nuncianti nemo non eandem fidem adhibeat, quam ARCHIMEDI HIERON adhiberi jussit.

3. Quam ob rem in hac Quaestionis vel intractatae novitate, vel vix delibatae implicatione & incertitudine aliquid conari viresque meas experiri volui, *nec cum fiducia inveniendi*, ut ait *SENECA* (i), *nec sine spe*. Quum autem casu certe magis quam ingenio in formulas inciderim valde concinnas & phaenomenis mirifice consentaneas statui rem omnem publici juris facere & doctorum judicio permittere. Eam itaque primum Problematis partem persequar, qua definienda venit in aestivo quolibet die hora aestus Solaris maximi, partem alteram deinde aggressurus ubi dies quaeritur aestivus calori omnium maximo respondens.

P A R S I.

4. **I**N triangulo sphaerico ZPS sit S Sol, P Polus
Z Zenit, & accipiatur loci latitudo $= \lambda$, Solis de-
clinatio $= \delta$, & ejus elevatio supra horizontem $= \varepsilon$.
Erit igitur, ut in I. Disquisitione

Tab. I.

Fig. 1.

(i) *SENECA* Quaest. Nat. Lib. VII. Cap. 29.

$$\sin. PZ = \cos. lat. = \cos. \lambda$$

$$\sin. PS = \cos. decl. = \cos. \delta$$

$$\cos. PZ = \sin. lat. = \sin. \lambda$$

$$\cos. PS = \sin. decl. = \sin. \delta$$

$$\cos. ZS = \sin. elev. = \sin. \varepsilon$$

Vulgatissimum autem Sphaericae Trigonometriae Theorema sequentem aequalitatem dat

$$\cos. ZS = \sin. PZ \sin. PS \cos. P + \cos. PZ \cos. PS,$$

hoc est facto angulo horario P, vel $SPZ = h$,

$$\sin. \varepsilon = \cos. \lambda \cos. \delta \cos. h + \sin. \lambda \sin. \delta.$$

§. Jamvero aestus Solaris intensio eam primum rationem sequitur, quae sinui altitudinis Solis supra horizontem directe respondet, veluti in I. Disquisitione firmavimus (1). Praeterea major etiam fit Solis

(1) Adversus eos, qui loco sinus altitudinis ejus quadratum usurpant, apodictice argumentatur Vir summus LAMBERTUS in *Pyrometria* §. 651. *Das Quadrat, inquit, des Sinus der Sonnenhöhe hat hier keine Bedeutung. Es kommt bloß auf die Menge und Dichtigkeit der Sonnenstralen, nicht aber auf den Stos gegen eine ebene Fläche an. Nicht die Feuertheilchen so aufstossen und daher nothwendig wieder zurückprallen, sondern die, welche nicht an der Fläche aufstossen, sondern in den zu erwärmenden Körper hineingehen, vermehren die Anzahl der Feuertheilchen oder die Wärme desselben. Dieses ist der Grund, warum schwarze Körper an der Sonne wärmer werden als weisse. Quae verba latine reddita sic sonant: Quadratum sinus altitudinis Solaris nullum hic sibi locum vin-*

Calor, quo longior est illius supra horizontem mora; augetur videlicet Calor in ratione simplici directa temporis, quo Sol ab horizonte ad datam altitudinem ascendit: nam quamvis MAIRANUS exemplo gravium libere decidentium & sursum verticaliter projectorum rationem temporis hujusmodi duplicatam ratione simplici potiore habuerit, hanc tamen consecutionem intulit ex hypothese minus vera, quandoquidem Calorem Solis non secus in aere ac tellure conservari posuit atque velocitas in gravibus descendentibus conservatur, quae scilicet semel impressa nunquam amittitur (m).

dicat. In numero tantum & densitate radiorum solarium, minime vero in illorum percussione vel ictu mechanico contra planum totius rei cardo vertitur. Ignearum corporis molecularum numerus, hoc est calor ipsius non augetur ab illis igneis particulis, quae in corporis superficiem impingunt, indeque necessario reflectuntur, sed ab iis tantum, quae superficiem praetereuntes intra corporis meatus se insinuant. Haecque causa est cur nigra corpora Soli obiecta vehementius quam alba incalescant.

(m) Praestat MAIRANUM ipsum diserte more suo & acute hac de re disputantem audire, quam inaudita causa refellere. *La raison (inquit ille) & l'expérience concourent à prouver que la chaleur imprimée à l'air & au terrain du climat, dans un jour & à une heure quelconques, y deviendra d'autant plus grande, que le Soleil aura plus long-temps séjourné auparavant sur l'horizon. La chaleur du jour Solstical, le plus long de tous & précédé*

6. Augetur itaque Solis aestus dato quolibet die

des plus longs jours, dont il participe, sera donc par-là une des principales causes de la supériorité de l'Eté sur l'Hiver. C'est une série croissante depuis le Solstice d'Hiver jusqu'à celui d'Eté, & décroissante depuis le Solstice d'Eté jusqu'à celui d'Hiver. Nous pouvons du moins la considérer sous cet aspect; car quoique le maximum & le minimum n'en soient pas toujours à la même place, qu'ils dussent, en général, se trouver plus ou moins au-delà des Solstices, & que la marche de la progression, abstraction faite des causes accidentelles, en dût devenir constante de l'un à l'autre terme par succession des temps, nous ne laisserons pas de supposer ici le jour Solsticial le plus chaud de tous, par lui-même en raison de l'arc diurne ou semi-diurne proportionnel à sa durée, & de plus comme précédé des jours les plus chauds; & ainsi de suite à l'égard de ceux-ci jusqu'au minimum. D'où naîtra une progression semblable à celle de la force croissante ou décroissante des corps qui descendent ou qui montent, par l'accélération, ou par le retardement du mouvement, & que j'évaluerai aussi de même par les quarrés des temps. Ainsi, par exemple, l'arc semi-diurne du jour Solsticial d'Eté à Paris, étant à peu-près double de l'arc semi-diurne du jour Solsticial d'Hiver, j'en conclurai l'expression de cet Elément à peu-pres en raison de 4. à 1., pour les deux Solstices, & ainsi de tous les autres climats, relativement à leurs latitudes & à l'arc semi-diurne qui y répond.

Sans l'effet rétroactif de cette puissante cause, il feroit plus de froid, du moins dans notre hémisphère, au lever & au coucher du Soleil en Eté & le jour même du Solstice, que dans le plus fort de l'Hiver, & réciproquement plus de chaud au lever & au coucher du Soleil en Hiver qu'en Eté; puisque tout le reste demeurant égal

ut sinus altitudinis, & ut tempus conjunctim, hoc est uti factum ex sinu altitudinis Solis in tempus, quod elabitur dum Sol ab horizonte ad altitudinem illam pertingit. Quum vero aestus *maximus*, quem hic unice spectamus, nequeat in momentum ullum antemer-

ou nul de part & d'autre, & abstraction faite de la chaleur imprimée les jours précédens, la distance du Soleil à la Terre est plus grande en Eté qu' en Hiver d'environ un million de lieues. D'où il suit, que le calcul de notre Eté & de notre Hiver, seroit défectueux, si nous ne faisons résulter ce quatrième Elément que du simple arc semi-diurne. Mem. de l' Acad. des Sciences de Paris pour l' année 1765. Ecquis vero MAIRANO concedat, (quod ratiocinationis suae fundamentum est) solstitialem diem esse omnium aestivorum calidissimum? Ecquis det, caloris incrementa progressionem constituere illi similem, quam incrementa velocitatis in gravibus libere decidentibus componunt? Ecquis denique MAIRANO assentiatur, conservari calorem in corporibus perinde ac velocitas lapsu acquisita conservatur, quam scilicet semel adeptam labentia corpora sublatis obstaculis continenter tuentur? Quam parum haec cum severioribus Physicorum dictatis cohaereant, nemo est qui non sentiat. Hac fortasse de causa Philosophus elegantissimus perpetuusque MAIRANI admirator BAILLY caloris aestimationem exponens, & elementum illud exagitans, quod a tempore vel arcu semidiurno constituitur, dum officiosis verbis duci blanditur suo, re desciscit ab ipso, & repudiato arcus semidiurni quadrato simplicem arcum usurpat. Vid. BAILLY *Lettres sur l' Origine des Sciences* Lett. IX.

dianum incidere, ut per se patet (*n*), proportionalis iccirco caloris quantitas pro momento quovis pomeridiano invenietur, si ducatur altitudo Solis pomeridiana in arcum vel angulum semidiurnum diei propositae auctum angulo horario post meridiem. Dicatur itaque *a* angulus vel arcus semidiurnus, sitque SPZ, vel *h* horarius angulus post meridiem; erit $a + h$ mensura temporis ab ortu solis ad momentum illud usque pomeridianum. Quapropter caloris intensio proportionalis erit analyticae expressioni $(a + h) \sin. \varepsilon$, sive ob aequalitatem antea constitutam

$$\sin. \varepsilon = \cos. \lambda \cos. \delta \cos. h + \sin. \lambda \sin. \delta,$$

caloris relativi formula pro momento quovis pomeridiano diei cujuscumque haec habebitur

$$\begin{aligned} & (a + h) (\cos. \lambda \cos. \delta \cos. h + \sin. \lambda \sin. \delta) \\ &= a \cos. \lambda \cos. \delta \cos. h + a \sin. \lambda \sin. \delta + h \cos. \lambda \times \\ & \cos. \delta \cos. h + h \sin. \lambda \sin. \delta. \end{aligned}$$

Igitur hujus formulae differentiale, accepta *h* variabili, inventum, & nihilo aequatum functionem ipsius

(*n*) Ex vulgatissima Inertiae lege fit, ut qui a continenti causae alicujus actione gignitur effectus, maximus non evadat nisi sat diu post momentum illud, quo maxima est causae actio: tunc enim solummodo effectus existit omnium maximus, cum decrementum ab imminuta causae actione profectum proxime par est incremento, quod ipse capit ex actione continuata.

h praebebit, quae pomeridianum aestus maximi momentum patefaciet. Propterea erit

$$-adh \sin. h \cos. \lambda \cos. \delta + dh \cos. h \cos. \lambda \cos. \delta \\ - h dh \sin. h \cos. \lambda \cos. \delta + dh \sin. \lambda \sin. \delta = 0, \text{ vel}$$

$$(M) \quad \cos. h - a \sin. h - h \sin. h + \frac{\sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. \lambda \cos. \delta} = 0.$$

7. Ut modo ex hac aequatione transcendenti quae-
sitam eliciam quantitatis h mensuram, experior primo
Analystis familiarissimam serierum reversionem.

Ex functionum circularium doctrina constat, esse

$$\cos. h = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \&c.$$

$$\sin. h = h - \frac{h^3}{2 \cdot 3} + \frac{h^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \&c.$$

Hisce valoribus in aequatione (M) subrogatis oritur

$$1 - ah - \frac{3}{2} h^2 + \frac{a}{6} h^3 + \frac{5}{24} h^4 \dots + \frac{\sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. \lambda \cos. \delta} = 0;$$

deinde divisione per $-a$ instituta prodit infinita aequatio

$$h + \frac{3}{2a} h^2 - \frac{1}{6} h^3 - \frac{5}{24a} h^4 \dots - \frac{\sin. \lambda \sin. \delta + \cos. \lambda \cos. \delta}{a \cos. \lambda \cos. \delta} = 0, \text{ seu}$$

$$h + \frac{3}{2a} h^2 - \frac{1}{6} h^3 - \frac{5}{24a} h^4 \dots - r = 0,$$

posito videlicet $r = \frac{\sin. \lambda \sin. \delta + \cos. \lambda \cos. \delta}{a \cos. \lambda \cos. \delta}$.

8. Pergo modo, assumoque

$$h = Ar + Br^2 + Cr^3 + Dr^4 + \&c.$$

$$+ \frac{3}{2a} h^2 = + \frac{3}{2a} A^2 r^2 + \frac{3}{a} ABr^3 + \frac{3}{2a} B^2 r^4$$

$$+ \frac{3}{a} ACr^4$$

$$- \frac{1}{6} h^3 = - \frac{1}{6} A^3 r^3 - \frac{1}{2} A^2 Br^4$$

$$- \frac{5}{24a} h^4 = - \frac{5}{24a} A^4 r^4$$

$$- r = - r$$

Ex comparatione coefficientium indeterminatorum sequentes oriuntur aequalitates

$$Ar - r = 0$$

$$Br^2 + \frac{3}{2a} A^2 r^2 = 0$$

$$Cr^3 + \frac{3}{a} ABr^3 - \frac{1}{6} A^3 r^3 = 0$$

$$Dr^4 + \frac{3}{2a} B^2 r^4 - \frac{1}{2} A^2 Br^4 + \frac{3}{a} ACr^4 - \frac{5}{24a} A^4 r^4 = 0.$$

Inde vero isti prodeunt coefficientium valores

$$A = 1$$

$$B = -\frac{3}{2a}$$

$$C = \frac{1}{6} + \frac{9}{2a^2}$$

$$D = -\frac{25}{24a} - \frac{135}{8a^3}$$

Igitur

$$h = r - \frac{3}{2a} r^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{9}{2a^2} \right) r^3$$

$$- \left(\frac{25}{24a} + \frac{135}{8a^3} \right) r^4 \text{ \&c.}$$

9. Pergo porro, & numericam temporis h mensuram hinc conor elicere ad hunc modum.

TICINI REGII diebus aestivis solstitialibus tempus semidiurnum, sive ab ortu Solis usque ad meridiem invenitur $= 7^h 56^m$, quod in arcum semidiurnum aequatoris conversum praebet arcum ipsum $= 2,077$, quum tota peripheria, quae horis 24. respondet, sit $= 6,283$ ex nota diametri ad circumferentiam ratione. Quare

a		$= 2, 077$
λ		$= 45^{\circ} 11'$
δ		$= 23^{\circ} 28'$
$\log. \sin. \lambda$		$= 9, 8508702$
$\log. \sin. \delta$		$= 9, 6001181$
$\log. \sin. \lambda \sin. \delta$		$= 9, 4509883$
$\sin. \lambda \sin. \delta$		$= 0, 2825$
$\log. \cos. \lambda$		$= 9, 8480909$
$\log. \cos. \delta$		$= 9, 9625076$
$\log. \cos. \lambda \cos. \delta$		$= 9, 8105985$
$\cos. \lambda \cos. \delta$		$= 0, 6465$
$\sin. \lambda \sin. \delta + \cos. \lambda \cos. \delta$		$= 0, 9290$
$\log. a$		$= 0, 3174116$
$\log. a \cos. \lambda \cos. \delta$		$= 0, 1280101$
$\log. (\sin. \lambda \sin. \delta + \cos. \lambda \cos. \delta)$		$= 9, 9680157$
$\log. \frac{\sin. \lambda \sin. \delta + \cos. \lambda \cos. \delta}{a \cos. \lambda \cos. \delta}$		$= \log. r = 9, 8400056$
r		$= 0, 6918$
$\log. r^2$		$= 9, 6800112$
$\log. 3$		$= 0, 4771213$

$$\log. 3 r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 1571325$$

$$\log. 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 3010300$$

$$\log. a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 3174116$$

$$\log. 2 a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 6184416$$

$$\log. \frac{3 r^2}{2 a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 9, 5386909$$

$$- \frac{3 r^2}{2 a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -0, 3457$$

$$\log. a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 6348232$$

$$\log. 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 3010300$$

$$\log. 2 a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 9358532$$

$$\log. 9 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 9542426$$

$$\log. \frac{9}{2 a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 0183894$$

$$\frac{9}{2 a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 1, 043$$

$$\frac{1}{6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 167$$

$$\frac{1}{6} + \frac{9}{2 a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 1, 210$$

$$\log. \left(\frac{1}{6} + \frac{9}{2a^2} \right) \dots = 0,0827854$$

$$\log. r^3 \dots = 9,5200168$$

$$\log. \left(\frac{1}{6} + \frac{9}{2a^2} \right) r^3 \dots = 9,6028022$$

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{9}{2a^2} \right) r^3 \dots = 0,4007$$

$$\log. 25 \dots = 1,3979400$$

$$\log. 24 \dots = 1,3802112$$

$$\log. a \dots = 0,3174116$$

$$\log. 24 a \dots = 1,6976228$$

$$\log. \frac{25}{24a} \dots = 9,7003172$$

$$\frac{25}{24a} \dots = 0,5016$$

$$\log. 135 \dots = 2,1303338$$

$$\log. (2a)^3 = \log. 8a^3 \dots = 1,8553248$$

$$\log. \frac{135}{8a^3} \dots = 0,2750090$$

$$\frac{135}{8a^3} \dots = 1,884$$

$$\begin{aligned} \frac{25}{24 a} + \frac{135}{8 a^3} & \dots = 2, 3856 \\ \log. \left(\frac{25}{24 a} + \frac{135}{8 a^3} \right) & \dots = 0, 3775976 \\ \log. r^4 & \dots = 9, 3600224 \\ \log. \left(\frac{25}{24 a} + \frac{135}{8 a^3} \right) r^4 & \dots = 9, 7376200 \\ - \left(\frac{25}{24 a} + \frac{135}{8 a^3} \right) r^4 & \dots = -0, 5465 \end{aligned}$$

Si valores nunc eruti in praecedenti aequatione sub-
rogentur, deprehenditur

$h = 0, 6918 - 0, 3457 - 0, 4007 - 0, 5465 \text{ \&c.}$
Quum autem series haec manifesto divergens sit, nihil-
que proinde nos doceat, alia via in radicem aequa-
tionis transcendens (M) inquirendum est.

10. Itaque per falsas positiones vadum tento; &
pono primum $h = 30^0 = 0, 524$. Hinc derivatur

$$\begin{aligned} \cos. h & \dots = 0, 8660 \\ \log. a & \dots = 0, 3174116 \\ \log. \sin. h & \dots = 9, 6989700 \\ \log. a \sin. h & \dots = 0, 0163816 \\ - a \sin. h & \dots = -1, 038 \\ \log. h & \dots = 9, 7193313 \end{aligned}$$

$$\log. h \sin. h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 9, 4183013$$

$$- h \sin. h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad - 0, 2620$$

$$\log. \sin. \lambda \sin. \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 9, 4509883$$

$$\log. \cos. \lambda \cos. \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 9, 8105985$$

$$\log. \frac{\sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. \lambda \cos. \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 9, 6403898$$

$$\frac{\sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. \lambda \cos. \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 4369$$

Igitur aequatio (M) fit

$$0, 8660 - 1, 038 - 0, 2620 + 0, 4369 = 0, 0029$$

adeoque error excessivus = 0, 0029

II. Sumo secundo $h = 45^{\circ} = 0, 785$; & consequor

$$\cos. h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 7071$$

$$\log. \sin. h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 9, 8494850$$

$$\log. a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 3174116$$

$$\log. a \sin. h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 1668966$$

$$- a \sin. h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad - 1, 469$$

$$\log. h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 9, 8948697$$

$$\log. h \sin. h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 9, 7443547$$

$$- h \sin. h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad - 0, 5551$$

$$\frac{\sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. \lambda \cos. \delta} \dots \dots \dots = 0,4369$$

Ex hoc oritur aequatio (*M*)

$$0,7071 - 1,469 - 0,5551 + 0,4369 = -0,8801;$$

ubi error defectivus = - 0,8801.

12. Quamobrem habebitur

$$\text{Posit. I. } h = 30^{\circ} = 0,524$$

$$\text{Err. I.} = + 0,0029$$

$$\text{Posit. II. } h = 45^{\circ} = 0,785$$

$$\text{Err. II.} = - 0,8801$$

Fiat jam uti Errorum summa ad Positionum differentiam ita Error minimus ad quartum proportionalem, seu

$$0,8830 : 15^{\circ} :: 0,0029 : 0,04926^{\circ} = 3' \text{ circiter.}$$

Quartus hic proportionalis additus primae Positioni efficit $h = 30^{\circ} 3' = 0,5245$; habeoque

$$\cos. h \dots \dots \dots = 0,8656$$

$$\log. a \dots \dots \dots = 0,3174116$$

$$\log. \sin. h \dots \dots \dots = 9,6996258$$

$$\log. a \sin. h \dots \dots \dots = 0,0170374$$

$$- a \sin. h \dots \dots \dots = -1,040$$

$$\log. h \dots \dots \dots = 9,7197190$$

$$\log. h \sin. h \dots \dots \dots = 9,4193448$$

$$- h \sin. h \quad = -0,2626$$

$$\frac{\sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. \lambda \cos. \delta} \quad = 0,4369$$

Proinde aequatio transcendens (M) abit in
 $0,8656 - 1,040 - 0,2626 + 0,4369 = -0,0001.$

Defectivus Error ex hac Positione ortus evadit

$$- 0,0001.$$

13. Propterea fit

$$Posit. I. h = 30^{\circ} = 0,524$$

$$Err. I. = + 0,0029$$

$$Posit. III. h = 30^{\circ} 3' = 0,5245$$

$$Err. III. = - 0,0001$$

Instituatur rursus analogia, quemadmodum est summa Errorum ad differentiam Positionum, ita Error minimus ad quartum, hoc est

$$0,003 : 3' :: 0,0001 : 0,1' = 6''.$$

Si quartus hic proportionalis $6''$ a tertia Positione $30^{\circ} 3'$ auferatur, invenitur ipsius h valor summe appropinquans nempe $h = 30^{\circ} 3' - 6'' = 30^{\circ} 2'.54''.$

14. Facta modo anguli hujus horarii conversione in tempus prodeunt horae duae, & minuta secunda duodecim paullo minus post meridiem. Nemo autem ignorat, in nostris hisce regionibus solstitialibus diebus aestum Solis maximum duabus circiter post meridiem horis saevire. Profecto tam admirabilis tamque inspe-

ratus aequationis nostrae cum veritate rerumque natura consensus aperte docet quanta sit in res physicas etiam abstrusiores subtilioresque Analyseos rite administratae potestas & imperium.



P A R S II.

15. **D**Efinienda nunc superest aestiva dies, qua Solis calor maximum acquirit incrementum. Ratum habeo plurimumque illustrium Physicorum suffragio firmatum, calorem Solis die quovis aestivo ingruentem, cum calore diei cujuscvis alterius comparatum rationem sequi compositam ex ratione directa simplici arcuum semidiurnorum, & sinuum altitudinum Solis meridianarum, & ex duplicata inversa distantiarum Solis a Terra, ita ut relativi caloris mensura aestivo quolibet die exprimatur per factum ex arcu semidiurno in sinum altitudinis Solis meridianaë divisum per quadratum distantiae Solis a Terra in eodem die. Quum autem maximus Solis calor, in quem inquirimus, neque ante Solstitium aestivum, ut palam est, neque post Æquinoctium autumnale incidere possit, & distantiae Solis

a Terra in hoc temporis intervallo mutabiles tam parum a se differant (*m*), ut caloris inde profecta variatio negligi tuto queat, quippe quae, ubi maxima fit, ad tres partes centesimas caloris solstitialis non pertingit; propterea in indicata caloris formula contempto denominatore, seu distantiae quadrato numerator superstes caloris diurni vim sufficienti accuratatione repraesentabit.

16. Si itaque altitudo Solis meridiana dato quolibet aestivo die dicatur *A*, arcus semidiurnus tunc temporis vocetur *P*, exponet formula $P \sin. A$ calorem illius diei relativum. Constat porro ex Astronomiae rudimentis in Hemisphaerio nostro Boreali aestivo tempore altitudinem Solis meridianam complementum esse arcus, qui metitur differentiam latitudinis loci & declinationis, ita nimirum ut sit $A + \lambda - \delta = 90^\circ$. Inde fiet $\sin. A = \cos. (\lambda - \delta)$, & formula $P \sin. A$ abibit in aliam

$$P \cos. (\lambda - \delta) = P \cos. \lambda \cos. \delta + P \sin. \lambda \sin. \delta.$$

In hac hypothesi caloris maximi accipiendum est formulae istius differentiale, & nihilo aequandum; sed oportet prius duarum variabilium *P*, & δ alter-

(*m*) Vid. excellens Opus inscriptum: *Recueil de Tables Astronomiques*, publié sous la direction de l'Académie Royale des Sciences & Belles Lettres de Prusse. Berlin 1776, pag. 259. Vol. I.

utram eliminare. Ad hanc rem subsidium peto ab aequatione superius (*Part. I.*) constituta

$$\sin. \varepsilon = \cos. \lambda \cos. \delta \cos. h + \sin. \lambda \sin. \delta,$$

in qua si horarius angulus h pertingere fumatur a meridie ad horizontem, evadit $h = P$, seu arcui semi-diurno, & $\varepsilon = 0$; adeoque aequatio fit $0 = \cos. \lambda \times$

$$\cos. \delta \cos. P + \sin. \lambda \sin. \delta, \text{ \& } \cos. \lambda \cos. \delta = -\frac{\sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. P}.$$

Hoc valore in caloris formula $P (\cos. \lambda \cos. \delta + \sin. \lambda \sin. \delta)$

$$\text{subrogato oritur } P \left(\sin. \lambda \sin. \delta - \frac{\sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. P} \right)$$

$$= \frac{P \sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. P} (\cos. P - 1):$$

17. Ut nunc inveniatur valor $\sin. \delta$ expressus per functionem ipsius P , quadretur aequatio $\cos. \lambda \cos. \delta$

$$= -\frac{\sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. P}, \text{ unde eruitur } \cos.^2 \lambda (1 - \sin.^2 \delta)$$

$$= \frac{\sin.^2 \lambda \sin.^2 \delta}{\cos.^2 P}, \text{ \& }$$

$$\sin.^2 \delta = \frac{\cos.^2 \lambda \cos.^2 P}{\sin.^2 \lambda + \cos.^2 \lambda \cos.^2 P}; \text{ eductaque radice}$$

$$\sin. \delta = \frac{\cos. \lambda \cos. P}{\sqrt{(\sin.^2 \lambda + \cos.^2 \lambda \cos.^2 P)}}. \text{ Hunc valorem}$$

$$\text{substituo in superiori formula } \frac{P \sin. \lambda \sin. \delta}{\cos. P} (\cos. P - 1),$$

& habeo $\frac{P \sin. \lambda \cos. \lambda (\cos. P - 1)}{\sqrt{(\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos^2 P)}}$ aestus Solaris

mensuram pro dato quolibet aestatis die. In hac postrema formula una tantum reperitur quantitas variabilis, nimirum P , quae in Boreali Hemisphaerio aestivo tempore nonaginta gradus semper excedit, ideoque differentiale ipsius $\cos. P$, quod secus foret negativum, in affirmativum vertitur. Hac itaque cautione sumpto ejusdem formulae differentiali invenio

$$\begin{aligned} & [(dP \cos. P \sin. \lambda \cos. \lambda + P dP \sin. P \sin. \lambda \cos. \lambda) \\ & \sqrt{(\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos^2 P)} - \frac{PdP \sin. P \cos^2 P \sin. \lambda \cos^3 \lambda}{\sqrt{(\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos^2 P)}} \\ & - dP \sin. \lambda \cos. \lambda \sqrt{(\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos^2 P)} \\ & + \frac{PdP \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^3 \lambda}{\sqrt{(\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos^2 P)}}] : (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos^2 P) = 0, \end{aligned}$$

& factis idoneis reductionibus tandem consequor equationem (N)

$$\begin{aligned} & P \sin. P \cos. \lambda \sin^3 \lambda + P \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^3 \lambda \\ & + \cos^3 P \sin. \lambda \cos^3 \lambda - \cos^2 P \sin. \lambda \cos^3 \lambda \\ & + \cos. P \cos. \lambda \sin^3 \lambda - \cos. \lambda \sin^3 \lambda = 0 \end{aligned}$$

18. Aequatio transcendens adeo simplex, quae scilicet functionem complectitur duarum tantum quantitatuum, in Problemate minime obvio & vulgari opta-

ri quidem, sed sperari nequaquam poterat. Hujus jam resolutionem per falsas Positiones aggredior in antecessum animadvertens esse $P > 90^\circ$, ideoque $\cos. P$ semper negativum.

Pono itaque primo arcum semidiurnum $P = 7. 56. = 119^\circ = 2, 077$; est autem TICINI $\lambda = 45^\circ 11'$. En totius calculi typum.

$$P = 119^\circ = 2, 077$$

$$\lambda = 45^\circ 11'$$

$$\log. P \quad = 0, 3174116$$

$$\log. \sin. P \quad = 9, 9418193$$

$$\log. \cos. P \quad = 9, 6855712$$

$$\log. \sin. \lambda \quad = 9, 8508702$$

$$\log. \cos. \lambda \quad = 9, 8480909$$

$$\log. \sin^3 \lambda \quad = 9, 5526106$$

$$\log. \cos^3 \lambda \quad = 9, 5442727$$

$$\log. P \sin. P \cos. \lambda \sin^3 \lambda \quad = 9, 6599324$$

$$P \sin. P \cos. \lambda \sin^3 \lambda \quad = 0, 457$$

$$\log. P \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^3 \lambda \quad = 9, 3399450$$

$$P \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^3 \lambda \quad = -0, 2187$$

$$\log. \cos^3 P \quad = 9, 0567136$$

$$\log. \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 8, 4518567$$

$$\cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -0, 0283$$

$$\log. \cos^2 P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 3711424$$

$$\log. \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 8, 7662853$$

$$- \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -0, 05838$$

$$\log. \cos P \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 0862727$$

$$\cos. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -0, 1221$$

$$\log. \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 4007015$$

$$- \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -0, 2516$$

Fit igitur aequatio (*N*)

$$0, 457 - 0, 2187 - 0, 0283 - 0, 05838 - 0, 1221 \\ - 0, 2516 = -0, 22208; \text{ ubi erratur per defe-} \\ \text{ctum } -0, 22208.$$

19. Assumo secundo $P = 90^\circ = 1, 571$; in qua assumptione fit $\sin. P = 1$, $\cos. P = 0$, & formula (*N*) evadit

$$P \cos. \lambda \sin^2 \lambda - \cos. \lambda \sin^2 \lambda = 0.$$

Nunc autem est

$$\log. P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0, 1961762$$

$$\log. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 5968777$$

$$P \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0, 3953$$

$$- \cos. \lambda \sin^3 \lambda \dots = -0,2516$$

Igitur formula (N) invenitur

$$0,3953 - 0,2516 = 0,1437$$

Quamobrem ex prima Positione Error nascitur defectivus $-0,22208$, ex secunda excessivus $+0,1437$, hoc est invenitur

$$Posit. I. P = 119^\circ = 2,077$$

$$Err. I. = -0,22208$$

$$Posit. II. P = 90^\circ = 1,571$$

$$Err. II. = +0,1437$$

Fiat modo uti Errorum summa ad Positionum differentiam, ita Error minimus ad quartum proportionalem, nimirum

$$0,36578 : 29^\circ :: 0,1437 : 11,39^\circ = 11^\circ 23'.$$

Quartus iste proportionalis $11^\circ 23'$ additus Positioni secundae 90° dat $P = 101^\circ 23' = 1,769$

20. Assumpto igitur tertio loco $P = 101^\circ 23' = 1,769$ invenitur

$$\log. P \dots = 0,2478311$$

$$\log. \sin. P \dots = 9,9913717$$

$$\log. \cos. \lambda \sin^3 \lambda \dots = 9,4007015$$

$$\log. P \sin. P \cos. \lambda \sin^3 \lambda \dots = 9,6399043$$

$$P \sin. P \cos. \lambda \sin^3 \lambda \dots = 0,4364$$

$\log. \cos. P$	$.$	$=$	9, 2876875
$\log. P \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^3 \lambda$	$. .$	$=$	8, 9220332
$P \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^3 \lambda$	$. . .$	$=$	- 0, 08357
$\log. \cos^3 P$	$.$	$=$	7, 8630625
$\log. \cos^3 P \sin. \lambda \cos^3 \lambda$	$. . . .$	$=$	7, 2582054
$\cos^3 P \sin. \lambda \cos^3 \lambda$	$.$	$=$	- 0, 001812
$\log. \cos^2 P$	$.$	$=$	8, 5753750
$\log. \cos^2 P \sin. \lambda \cos^3 \lambda$	$. . . .$	$=$	7, 9705179
$— \cos^2 P \sin. \lambda \cos^3 \lambda$	$.$	$=$	- 0, 009344
$\log. \cos. P \cos. \lambda \sin^3 \lambda$	$.$	$=$	8, 6883890
$\cos. P \cos. \lambda \sin^3 \lambda$	$.$	$=$	- 0, 0488
$— \cos. \lambda \sin^3 \lambda$	$.$	$=$	- 0, 2516

Hinc formula (N) convertitur in

0, 4364 — 0, 08357 — 0, 001812 — 0, 009344
 — 0, 0488 — 0, 2516 = 0, 041274, prodeunte ni-
 mirum errore per excessum 0, 041274. Quare

Posit. II. $P = 90^\circ$ $= 1, 571$

Err. II. $= + 0, 1437$

Posit. III. $P = 101^\circ 23'$ $= 1, 769$

Err. III. $= + 0, 041274$

Nunc autem propter Errorum similitudinem (nam

ambo sunt per excessum) analogia instituitur hoc pacto , uti Errorum differentia ad differentiam Positionum, ita Error minimus ad quartum, hoc est

$$0, 102426 : 683' :: 0, 041274 : 275, 2' = 4^{\circ} 35'.$$

Addatur porro quartus nunc erutus $4^{\circ} 35'$ Positioni tertiae $101^{\circ} 23'$, ut fiat $P = 105^{\circ} 58' = 1, 849$.

21. Pergo iterum, & pono quarto loco

$$P = 105^{\circ} 58' = 1, 849$$

$$\log. P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0, 2670338$$

$$\log. \sin. P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 9829140$$

$$\log. \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 4007015$$

$$\log. P \sin. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 6506493$$

$$P \sin. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0, 4474$$

$$\log. \cos. P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 4394560$$

$$\log. \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 3951429$$

$$\log. P \sin. P \cos. P \sin. \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 0845467$$

$$P \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -0, 1215$$

$$\log. \cos^2 P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 8, 3183680$$

$$\log. \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 7, 7135109$$

$$\cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -0, 00517$$

$$\log. \cos^2 P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 8, 8789120$$

$$\log. \cos.^2 P \sin. \lambda \cos.^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad = 8, 2740549$$

$$- \cos.^2 P \sin. \lambda \cos.^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad = -0, 0188$$

$$\log. \cos. P \cos. \lambda \sin.^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad = 8, 8401575$$

$$\cos. P \cos. \lambda \sin.^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad = -0, 06921$$

$$- \cos. \lambda \sin.^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad = -0, 2516$$

Consequenter formula (N) abit in

$$0, 4474 - 0, 1215 - 0, 00517 - 0, 0188 - 0, 06921 \\ - 0, 2516 = -0, 01888; \text{erratur scilicet per de-} \\ \text{fectum } -0, 01888. \text{ Quamobrem}$$

$$\textit{Posit. III. } P = 101^\circ 23' = 1, 769$$

$$\textit{Err. III. } = +0, 041274$$

$$\textit{Posit. IV. } P = 105^\circ 58' = 1, 849$$

$$\textit{Err. IV. } = -0, 01888$$

Inveniatur, ut antea, quartus proportionalis post Er-
rorum summam, Positionum differentiam, & Errorem
minimum, hoc est fiat

$$0, 060154 : 275' :: 0, 01888 : 8, 631' = 9' \text{ circiter.}$$

Tum quartus proportionalis modo inventus 9' aufe-
ratur a Positione quarta, quo facto oritur $P = 105^\circ 49'$
 $= 1, 847.$

22. Itaque pono demum quinto loco

$P = 105^{\circ} 49' = 1,847$	
$\log. P$	$= 0,2664186$
$\log. \sin. P$	$= 9,9832377$
$\log. \cos. \lambda \sin^2 \lambda$	$= 9,4007015$
$\log. P \sin. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda$	$= 9,6503578$
$P \sin. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda$	$= 0,4470$
$\log. \cos. P$	$= 9,4354623$
$\log. \sin. \lambda \cos^2 \lambda$	$= 9,3951429$
$\log. P \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^2 \lambda$	$= 9,0802615$
$P \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^2 \lambda$	$= -0,1203$
$\log. \cos^2 P$	$= 8,3063869$
$\log. \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda$	$= 7,7015298$
$\cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda$	$= -0,00503$
$\log. \cos^2 P$	$= 8,8709246$
$\log. \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda$	$= 8,2660675$
$\cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda$	$= -0,01845$
$\log. \cos. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda$	$= 8,8361638$
$\cos. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda$	$= -0,06857$
$\cos. \lambda \sin^2 \lambda$	$= -0,2516$

Hinc formula (N) detegitur

$$0,4470 - 0,1203 - 0,00503 - 0,01845 - 0,06857 \\ - 0,2516 = - 0,01695. \text{ Iccirco habetur}$$

$$\text{Posit. IV. } P = 105^{\circ} 58' = 1,849$$

$$\text{Err. IV.} = - 0,041274$$

$$\text{Posit. V. } P = 105^{\circ} 49' = 1,847$$

$$\text{Err. V.} = - 0,01695$$

Fiat iterum uti Errorum similium differentia ad differentiam Positionum, ita Error minimus ad quantum proportionalem, nimirum

$$0,024324 : 9' :: 0,01695 : 6,286' = 6'.$$

Hoc dempto a Positione quinta resultat $P = 105^{\circ} 43' = 1,845$.

23. Pono rursus sexto loco

$$P = 105^{\circ} 43' = 1,845$$

$$\log. P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0,2660080$$

$$\log. \sin. P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9,9834517$$

$$\log. \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9,4007015$$

$$\log. P \sin. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9,6501612$$

$$P \sin. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0,4468$$

$$\log. \cos. P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9,4327777$$

$$\log. \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9,3951429$$

$$\log. P \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos.^3 \lambda \dots = 9, 0773803$$

$$P \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos.^3 \lambda \dots = -0, 1195$$

$$\log. \cos.^3 P \dots = 8, 2983331$$

$$\log. \cos.^3 P \sin. \lambda \cos.^3 \lambda \dots = 7, 6934760$$

$$\cos.^3 P \sin. \lambda \cos.^3 \lambda \dots = -0, 004937$$

$$\log. \cos.^2 P \dots = 8, 8655554$$

$$\log. \cos.^2 P \sin. \lambda \cos.^3 \lambda \dots = 8, 2606983$$

$$- \cos.^2 P \sin. \lambda \cos.^3 \lambda \dots = -0, 01823$$

$$\log. \cos. P \cos. \lambda \sin.^3 \lambda \dots = 8, 8334792$$

$$\cos. P \cos. \lambda \sin.^3 \lambda \dots = -0, 06815$$

$$- \cos. \lambda \sin.^3 \lambda \dots = -0, 2516$$

Hinc formula (N) invenitur

$$0, 4468 - 0, 1195 - 0, 004937 - 0, 01823 - 0, 06815$$

$$- 0, 2516 = -0, 015617. \text{ Iccirco habetur}$$

$$\text{Posit. V. } P = 105^\circ 49' = 1, 847$$

$$\text{Err. V. } = -0, 01695$$

$$\text{Posit. VI. } P = 105^\circ 43' = 1, 845$$

$$\text{Err. VI. } = -0, 015617$$

Fiat rursus uti Errorum similium differentia ad differentiam Positionum, ita Error minimus ad quartum hoc est

$$0, 001333 : 6' :: 0, 015617 : 70, 29' = 1^\circ 10'.$$

Quartus proportionalis $1^{\circ} 10'$ ablatum a Positione sexta $105^{\circ} 43'$ praebet $P = 104^{\circ} 33' = 1,825$.

24. Pono igitur septimo loco

$$P = 104^{\circ} 33' = 1,825$$

$\log. P$		$= 0,2611886$
$\log. \sin. P$		$= 9,9858434$
$\log. \cos. P$		$= 9,4000625$
$\log. \cos^2 P$		$= 8,8001250$
$\log. \cos^3 P$		$= 8,2001876$
$\log. \cos. \lambda \sin^3 \lambda$		$= 9,4007015$
$\log. \sin. \lambda \cos^3 \lambda$		$= 9,3951429$
$\log. P \sin. P \cos \lambda \sin^3 \lambda$		$= 9,6477335$
$P \sin. P \cos. \lambda \sin^3 \lambda$		$= 0,4444$
$\log. P \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^3 \lambda$		$= 9,0422374$
$P \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^3 \lambda$		$= -0,1102$
$\log. \cos^3 P \sin. \lambda \cos^3 \lambda$		$= 7,5953304$
$\cos^3 P \sin. \lambda \cos^3 \lambda$		$= -0,003938$
$\log. \cos^2 P \sin. \lambda \cos^3 \lambda$		$= 8,1952679$
$-\cos^2 P \sin. \lambda \cos^3 \lambda$		$= -0,01568$
$\log. \cos. P \cos. \lambda \sin^3 \lambda$		$= 8,8007640$

$$\cos. P \cos. \lambda \sin.^2 \lambda \dots = -0,06321$$

$$- \cos. \lambda \sin.^2 \lambda \dots = -0,2516$$

Quapropter aequatio (*N*) fit

$$0,4444 - 0,1102 - 0,003938 - 0,01568 - 0,06321$$

$$- 0,2516 = - 0,0002. \text{ Est igitur}$$

$$\text{Posit. VI. } P = 105^{\circ} 43' = 1,845$$

$$\text{Err. VI. } = - 0,015617$$

$$\text{Posit. VII. } P = 104^{\circ} 33' = 1,825$$

$$\text{Err. VII. } = - 0,0002$$

Instituatur rursus analogia, uti Errorum differentia ad differentiam Positionum, ita Error minimus ad quartum, videlicet $0,0154:70'::0,0002:0,9092'=54''$. Auferatur jam a Positione septima $104^{\circ} 33'$ quartus modo inventus $54''$, & orietur tandem aequationis (*N*) radix vero maxime appropinquans $P = 104^{\circ} 32'.6''$.

25 Igitur invenimus demum arcum semidiurnum calori aestivo vehementissimo respondentem, qui porro arcus si convertatur in tempus praebet $6^h 58^m$, nimirum horas sex, & minuta quinquaginta octo. Invento autem arcu semidiurno facile erit declinationem Solis, proindeque & diem quaesitam detegere. Enimvero nacti antea fumus aequalitatem

$$\sin. \delta = \frac{\cos. \lambda \cos. P}{\sqrt{(\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos^2 P)}}. \text{ Propterea}$$

subducto calculo fiet

$$P = 104^{\circ} 32'$$

$\log. \cos. \lambda$	$\dots \dots \dots$	$=$	9, 8480909
$\log. \cos. P$	$\dots \dots \dots$	$=$	9, 3995754
$\log. \cos. \lambda \cos. P$	$\dots \dots \dots$	$=$	9, 2476663
$\log. \sin. \lambda$	$\dots \dots \dots$	$=$	9, 8508702
$\log. \sin^2 \lambda$	$\dots \dots \dots$	$=$	9, 7017404
$\sin^2 \lambda$	$\dots \dots \dots$	$=$	0, 5032
$\log. \cos^2 \lambda$	$\dots \dots \dots$	$=$	9, 6961818
$\log. \cos^2 P$	$\dots \dots \dots$	$=$	8, 7991508
$\log. \cos^2 \lambda \cos^2 P$	$\dots \dots \dots$	$=$	8, 4953326
$\cos^2 \lambda \cos^2 P$	$\dots \dots \dots$	$=$	0, 03128
$\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos^2 P$	$\dots \dots \dots$	$=$	0, 53448
$\log. (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos^2 P)$	$\dots \dots$	$=$	9, 7279315
$\log. \sqrt{(\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos^2 P)}$	$\dots$	$=$	9, 8639657
$\log. \frac{\cos. \lambda \cos. P}{\sqrt{(\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos^2 P)}}$	$= \log. \sin. \delta$	$=$	9, 3837006

Hinc eruitur $\delta = 14^{\circ}$, quod incidit in diem 14.^{um} & 15.^{um} mensis augusti. Is itaque dies prae aestivis omnibus Maximo Caloris gradu infamis erit. Hoc vero si cum Physicorum observationibus calorem maximum in nostro climate circiter finem Julii, & initium Augusti indicantibus non quadrat ad amissim, tam parum tamen ab illis discordat, ut in quaestione tam lubrica tantisque impedita difficultatibus majorem consensum nemo postulaverit nisi totius rei physicae, & mathematicae rudis.

26. Experiamur nunc strictim cursimque, quid in aestimatione Caloris Annui Maximi obveniat, si loco arcus semidiurni simplicis adhibeatur quadratum illius, ut non paucis Physicis placet. In hac itaque hypothesi rationes repetens §. 16. subductas invenio calorem diei cujusvis aestivi ab expressione

$$\frac{P^2 \sin. \lambda \cos. \lambda (\cos. P - 1)}{\sqrt{(\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos^2 P)}} \text{ repraesentatum. In}$$

hac expressione variat sola quantitas P , estque ea aestatis tempore semper major arcu quadrantali, indeque negativus est $\cos. P$, & vicissim affirmativum differentiale ejusdem. Quamobrem si hac circumspeditione accipiaturs caloris modo inventi differentiale, illudque nihilo aequetur, per idonea calculi compendia ad se-

quentem demum pervenimus aequationem

$$P^2 \sin. P \cos. \lambda \sin.^3 \lambda + P^2 \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos.^3 \lambda \\ + 2P \cos. P \cos. \lambda \sin.^3 \lambda + 2P \cos.^3 P \sin. \lambda \cos.^3 \lambda \\ - 2P \cos.^2 P \sin. \lambda \cos.^3 \lambda - 2P \cos. \lambda \sin.^3 \lambda = 0.$$

27. Capto, ut ante, $\lambda = 45^\circ 11'$, fiat $P = 110^\circ = 1, 9199$; videamusque quemnam valorem ex hifce assumptionibus superior aequatio nanciscatur. Igitur

$$P = 110^\circ = 1, 9199$$

$$\lambda = 45^\circ 11'$$

$\log. P$		$= 0, 2832786$
$\log. P^2$		$= 0, 5665572$
$\log. \sin. P$		$= 9, 9729858$
$\log. \cos. \lambda \sin.^3 \lambda$		$= 9, 4007015$
$\log. P^2 \sin. P \cos. \lambda \sin.^3 \lambda$		$= 9, 9402445$
$P^2 \sin. P \cos. \lambda \sin.^3 \lambda$		$= 0, 8715$
$\log. \cos. P$		$= 9, 5340517$
$\log. P^2 \sin. P \cos. P$		$= 0, 0735947$
$\log. \sin. \lambda \cos.^3 \lambda$		$= 9, 3951429$
$\log. P^2 \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos.^3 \lambda$		$= 9, 4687376$
$P^2 \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos.^3 \lambda$		$= -0, 2943$
$\log. 2$		$= 0, 3010300$

$\log. P$		$=$	0, 2832786
$\log. \cos. P$		$=$	9, 5340517
$\log. \cos. \lambda \sin^2 \lambda$		$=$	9, 4007015
$\log. 2 P \cos. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda$		$=$	9, 5190618
$2 P \cos. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda$		$=$	- 0, 3304
$\log. 2 P$		$=$	0, 5843086
$\log. \cos^2 P$		$=$	8, 6021551
$\log. \sin. \lambda \cos^2 \lambda$		$=$	9, 3951429
$\log. 2 P \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda$		$=$	8, 5816066
$2 P \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda$		$=$	- 0, 0382
$\log. 2 P$		$=$	0, 5843086
$\log. \cos^2 P$		$=$	9, 0681034
$\log. \sin. \lambda \cos^2 \lambda$		$=$	9, 3951429
$\log. 2 P \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda$		$=$	9, 0475549
$- 2 P \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda$		$=$	- 0, 1116
$\log. 2 P$		$=$	0, 5843086
$\log. \cos. \lambda \sin^2 \lambda$		$=$	9, 4007015
$\log. 2 P \cos. \lambda \sin^2 \lambda$		$=$	9, 9850101
$- 2 P \cos. \lambda \sin^2 \lambda$		$=$	- 0, 9661

Quamobrem superior aequatio abit in $0,8715 - 0,2943$
 $- 0,3304 - 0,0382 - 0,1116 - 0,9661 = - 0,8691$.
 Hinc erratur per defectum quantitate $- 0,8691$.

28. Sumo secundo loco

$$P = 105^\circ = 1,8326$$

$$\lambda = 45^\circ 11'$$

$\log. P$		$= 0,2630677$
$\log. P^2$		$= 0,5261354$
$\log. \sin. P$		$= 9,9849438$
$\log. \cos. \lambda \sin^3 \lambda$		$= 9,4007015$
$\log. P^2 \sin. P \cos. \lambda \sin^3 \lambda$		$= 9,9117807$
$P^2 \sin. P \cos. \lambda \sin^3 \lambda$		$= 0,8162$
$\log. P^2 \sin. P$		$= 0,5110792$
$\log. \cos. P$		$= 9,4129962$
$\log. \sin. \lambda \cos^3 \lambda$		$= 9,3951429$
$\log. P^2 \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^3 \lambda$		$= 9,3192183$
$P^2 \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^3 \lambda$		$= - 0,2085$
$\log. 2$		$= 0,3010300$
$\log. P$		$= 0,2630677$
$\log. \cos. P$		$= 9,4129962$

$$\log. \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 4007015$$

$$\log. 2 P \cos. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 3777954$$

$$2 P \cos. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -0, 2387$$

$$\log. 2 P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0, 5640977$$

$$\log. \cos^2 P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 8, 2389886$$

$$\log. \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 3951429$$

$$\log. 2 P \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 8, 1982292$$

$$2 P \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -0, 0158$$

$$\log. 2 P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0, 5640977$$

$$\log. \cos^2 P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 8, 8259924$$

$$\log. \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 3951429$$

$$\log. 2 P \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 8, 7852330$$

$$- 2 P \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -0, 0610$$

$$\log. 2 P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0, 5640977$$

$$\log. \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 4007015$$

$$\log. 2 P \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 9647992$$

$$- 2 P \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = -0, 9221$$

Hinc praecedens aequatio sequentem nanciscitur va-
lorem $0, 8162 - 0, 2085 - 0, 2387 - 0, 0158$

— 0, 0610 — 0, 9221 = — 0, 6299, hoc est peccat iterum defectu.

29. Accipiat nunc arcus semidiurnus ipsius diei solstitialis aestivi, quando scilicet $\delta = 23^{\circ} 28'$. Id assequemur per formulam §. 25. $\sin. \delta = \frac{\cos. \lambda \cos. P}{\sqrt{(\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \cos^2 P)}}$,

$$\text{ex qua opportunis peractis reductionibus eruitur } \cos. P = \tan. \delta \tan. \lambda. \text{ Igitur}$$

$$\log. \tan. \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 6376106$$

$$\log. \tan. \lambda = \log. \tan. 45^{\circ} 11' \quad . \quad = 10, 0027793$$

$$\log. \tan. \delta \tan. \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 6403899$$

Quare si P esset quadrante minor prodiret $\cos. P = \cos. 64^{\circ} 6'$; quum autem, ut alias constat, sit P quadrante major fit ideo $\cos. P = \cos. (180^{\circ} - 64^{\circ} 6')$ $= \cos. 115^{\circ} 54'$, seu $P = 115^{\circ} 54'$. Ponatur itaque tertio loco

$$P = 115^{\circ} 54' = 2, 0228$$

$$\lambda = 45^{\circ} 11'$$

$$\log. P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0, 3059529$$

$$\log. P^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0, 6119058$$

$$\log. \sin. P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 9540291$$

$$\log. \cos. \lambda \sin^2 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 9, 4007015$$

$\log. P^2 \sin. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda$	$\cdot \cdot \cdot =$	0, 2725893
$P^2 \sin. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda$	$\cdot \cdot \cdot =$	1, 8732
$\log. \cos. P$	$\cdot \cdot \cdot =$	9, 6402844
$\log. P^2 \sin. P$	$\cdot \cdot \cdot =$	0, 5659349
$\log. \sin. \lambda \cos^2 \lambda$	$\cdot \cdot \cdot =$	9, 3951429
$\log. P^2 \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^2 \lambda$	$\cdot =$	9, 6013622
$P^2 \sin. P \cos. P \sin. \lambda \cos^2 \lambda$	$\cdot \cdot \cdot =$	- 0, 3994
$\log. 2$	$\cdot \cdot \cdot =$	0, 3010300
$\log. P$	$\cdot \cdot \cdot =$	0, 3059529
$\log. \cos. P$	$\cdot \cdot \cdot =$	9, 6402844
$\log. \cos. \lambda \sin^2 \lambda$	$\cdot \cdot \cdot =$	9, 4007015
$\log. 2 P \cos. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda$	$\cdot \cdot \cdot =$	9, 6479688
$2 P \cos. P \cos. \lambda \sin^2 \lambda$	$\cdot \cdot \cdot =$	- 0, 4446
$\log. 2 P$	$\cdot \cdot \cdot =$	0, 6069829
$\log. \cos^2 P$	$\cdot \cdot \cdot =$	8, 9208632
$\log. \sin. \lambda \cos^2 \lambda$	$\cdot \cdot \cdot =$	9, 3951429
$\log. 2 P \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda$	$\cdot \cdot \cdot =$	8, 9229790
$2 P \cos^2 P \sin. \lambda \cos^2 \lambda$	$\cdot \cdot \cdot =$	- 0, 0837
$\log. 2 P$	$\cdot \cdot \cdot =$	0, 6069829

J

$$\log. \cos^2 P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 9, 2805688$$

$$\log. \sin. \lambda \cos^3 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 9, 3951429$$

$$\log. 2P \cos^2 P \sin. \lambda \cos^3 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 9, 2826946$$

$$- 2P \cos^2 P \sin. \lambda \cos^3 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad = \quad - 0, 1917$$

$$\log. 2P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 6069829$$

$$\log. \cos. \lambda \sin^3 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 9, 4007015$$

$$\log. 2P \cos. \lambda \sin^3 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 0076844$$

$$- 2P \cos. \lambda \sin^3 \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad - 1, 1018$$

Propterea superior aequatio hanc induit formam

$$1, 8732 - 0, 3994 - 0, 4446 - 0, 0837 - 0, 1917 \\ - 0, 1018 = - 0, 3480, \text{ aberrat scilicet a nihilo} \\ \text{per defectum} - 0, 3480.$$

30. Adhibeatur postremo $P = 90^\circ$; tuncque ob $\cos. P = 0$, $\sin. P = 1$ aequatio praecedens ad duos tantum terminos contrahitur $P^2 \cos. \lambda \sin^3 \lambda - 2P \cos. \lambda \sin^3 \lambda = 0$. Est igitur

$$P = 90^\circ = 1, 5708$$

$$\lambda = 45^\circ. 11'$$

$$\log. P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = \quad 0, 1961209$$

$$\log. P^2 \dots \dots \dots = 0, 3922418$$

$$\log. \cos. \lambda \sin^3 \lambda \dots \dots \dots = 9, 4007015$$

$$\log. P^2 \cos. \lambda \sin^3 \lambda \dots \dots \dots = 9, 7929433$$

$$P^2 \cos. \lambda \sin^3 \lambda \dots \dots \dots = 0, 6208$$

$$\log. 2 \dots \dots \dots = 0, 3010300$$

$$\log. P \dots \dots \dots = 0, 1961209$$

$$\log. \cos. \lambda \sin^3 \lambda \dots \dots \dots = 9, 4007015$$

$$\log. 2 P \cos. \lambda \sin^3 \lambda \dots \dots \dots = 9, 8978524$$

$$- 2 P \cos. \lambda \sin^3 \lambda \dots \dots \dots = - 0, 7904$$

Itaque suscipit aequatio formam $0, 6208 - 0, 7904$
 $= - 0, 1696$, seu tantundem aberrat a genuino va-
 lore, nimirum a nihilo.

31. Ex dictis sequens habetur assumptionum, er-
 rorumque conspectus:

Arcus Semidiurni	Errores
115° 54'	— 0, 3480
110°	— 0, 8691
105°	— 0, 6299
90°	— 0, 1696

quem qui paullo attentius examinaverit, Errorumque indolem, mensuram, progressum, atque illorum cum Assumptionibus respondentibus relationes rite perpendit, is apodictice invicteque colliget, Calorem Maximum, quem hic unice spectamus, in nullum incidere posse tempus, quod cum Physicorum observationibus vel aliquantulum conspiret, & consequenter hypothesim de quadrato arcus semidiurni ante dictam excussis cardinibus convulsisque fundamentis corruere.



Fig. 2.

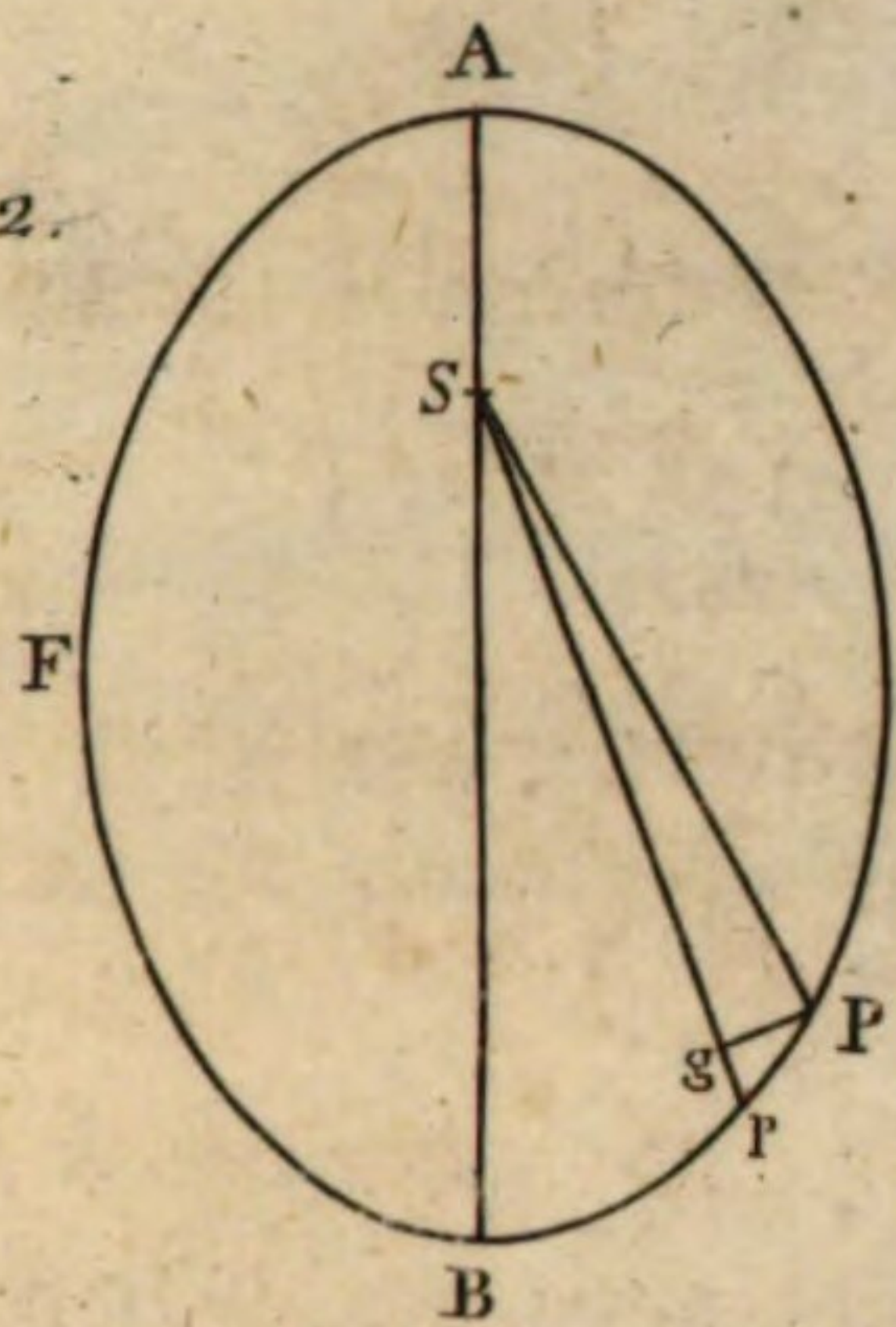


Fig. 3.

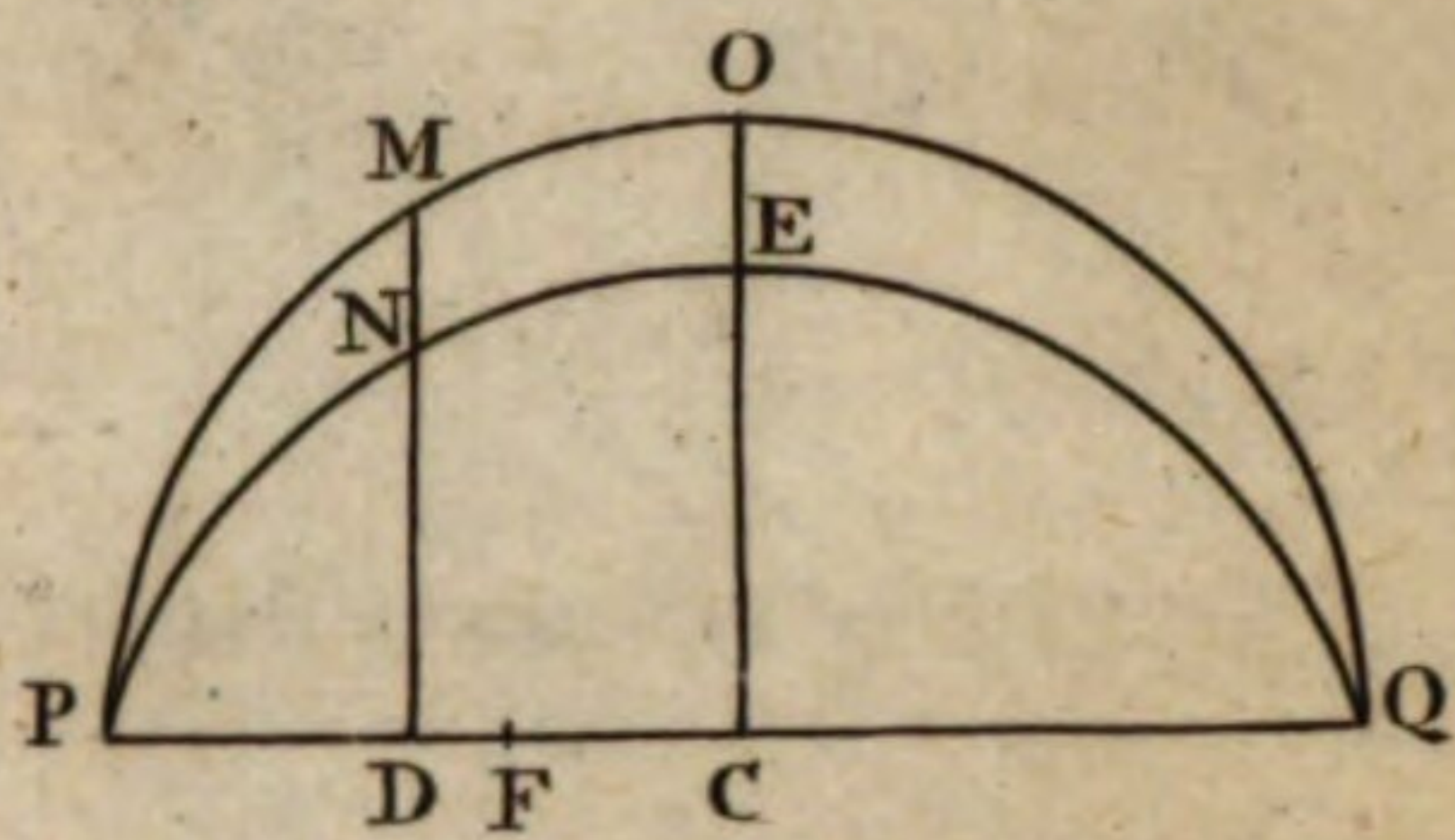


Fig. 5.

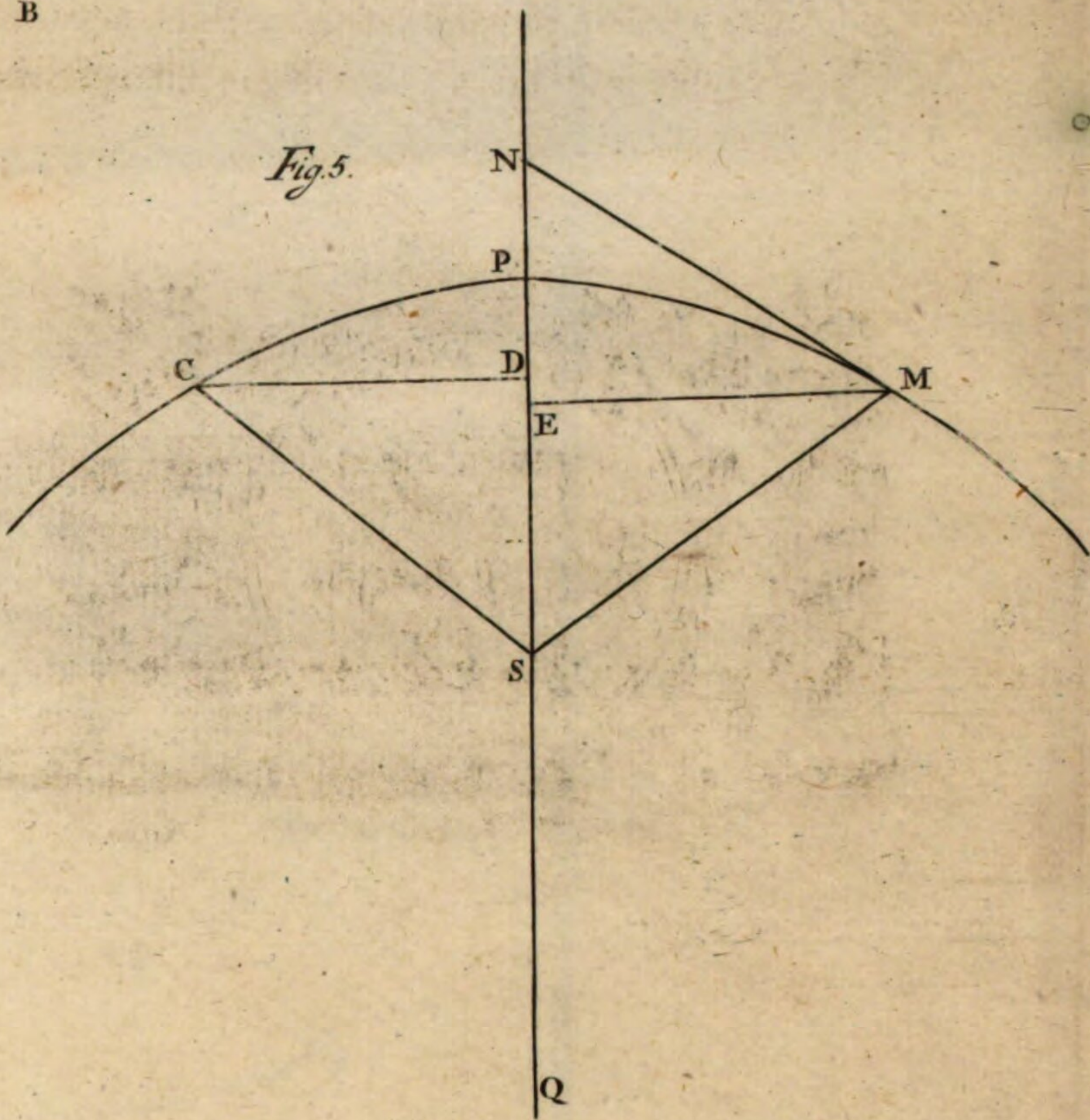


Fig. 7.

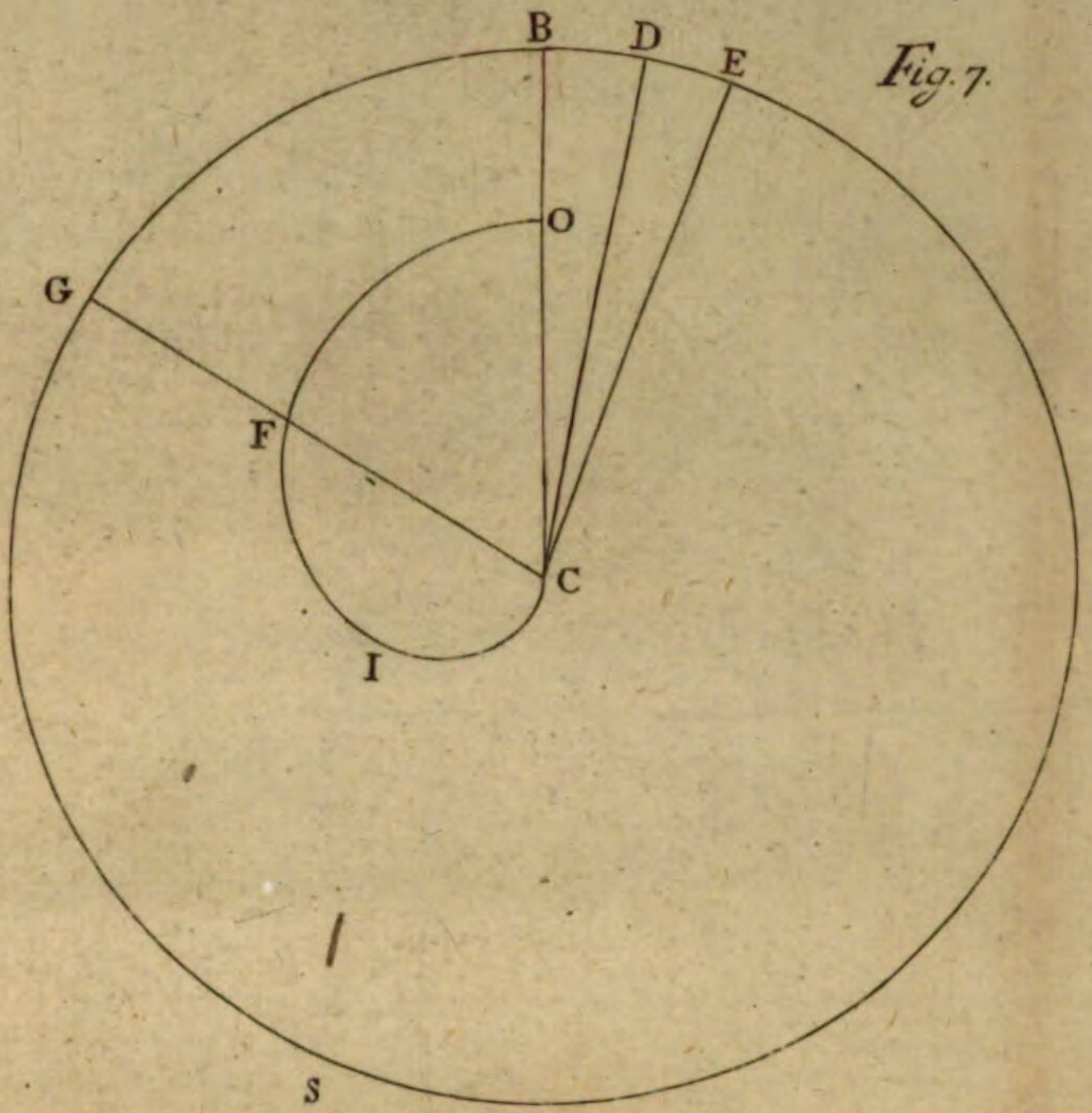


Fig. 6.

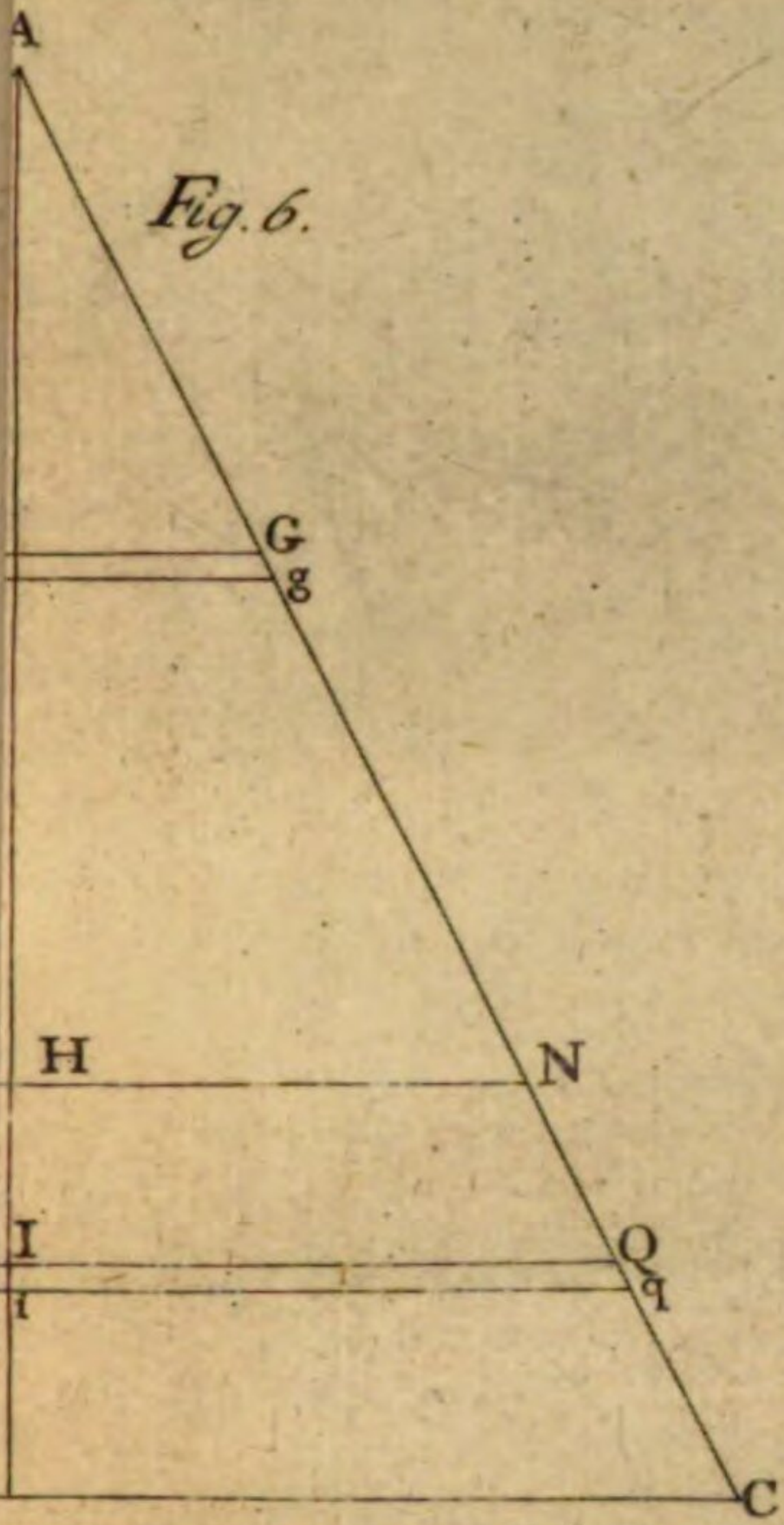


Fig. 8.

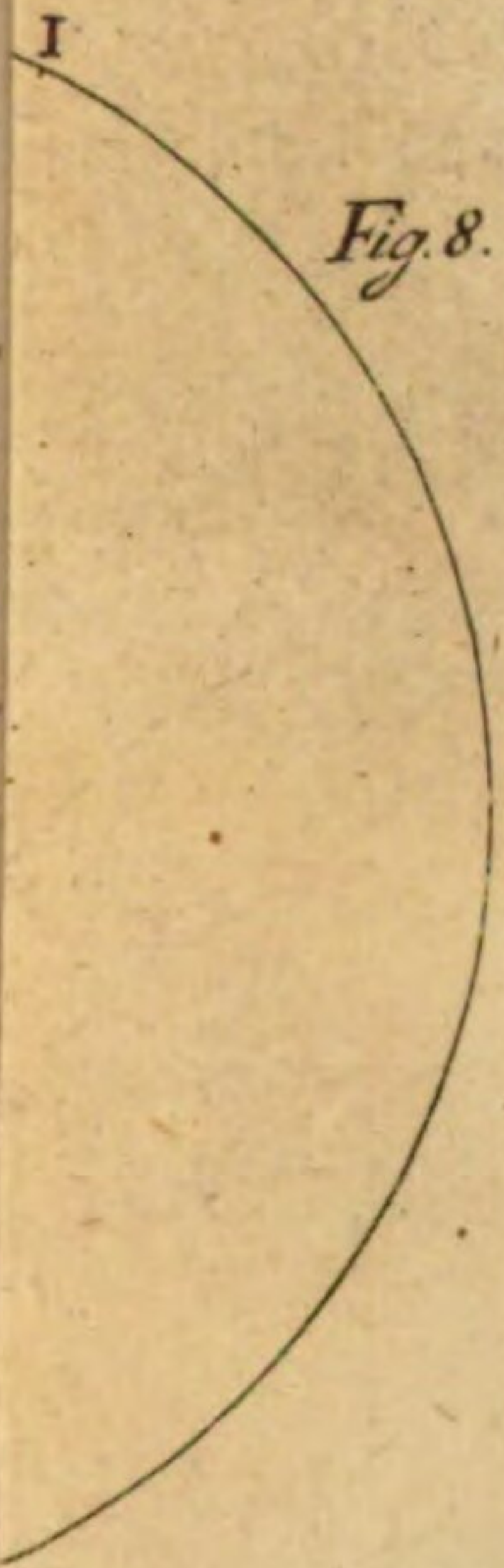
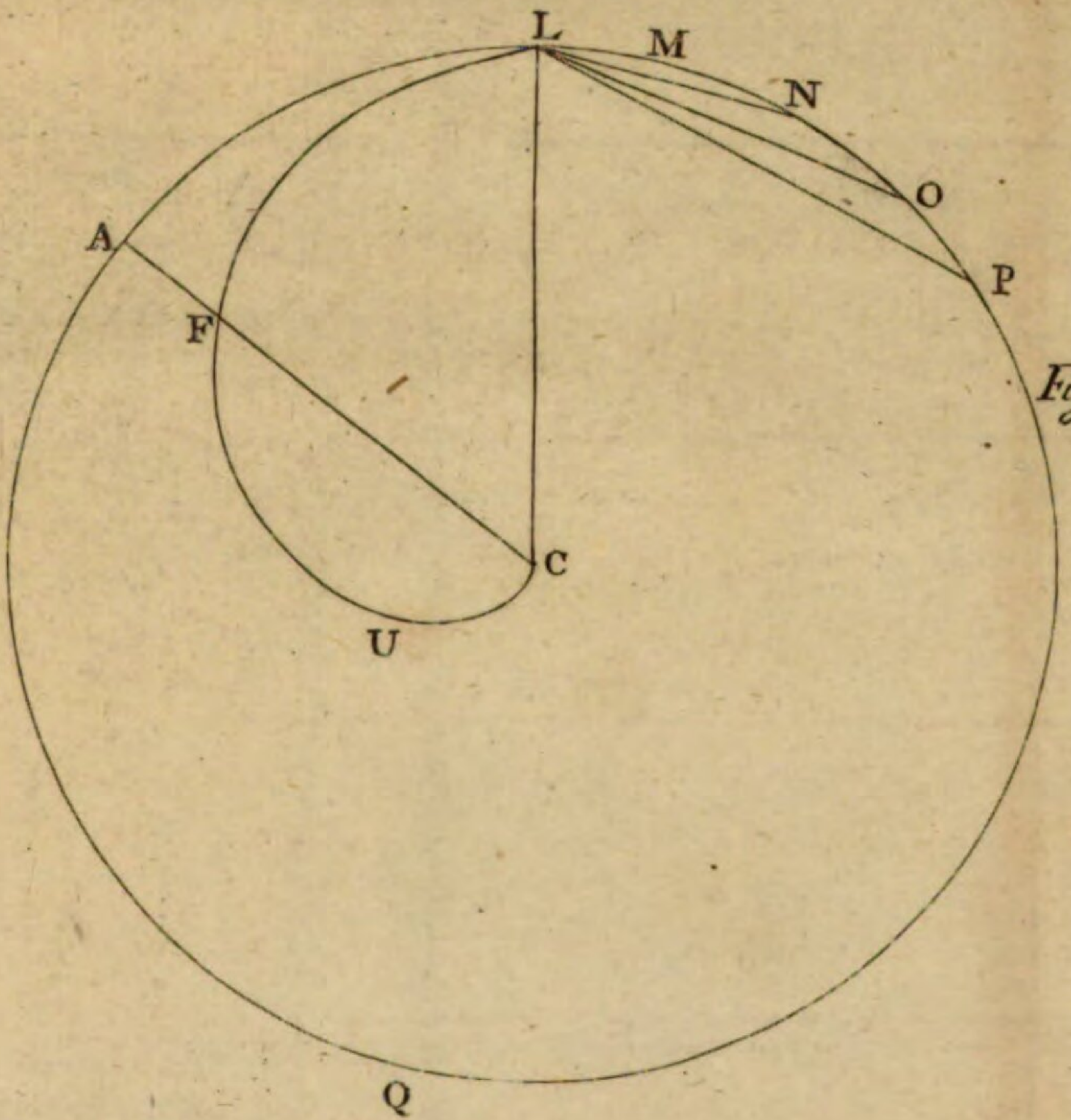


Fig. 9.







Fontana, Gregorio,

Disquisitiones physico-mathematicae

Papia 1780

4 Math.u. 26 m

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10525540-5